

Ejercicio 1. (25 puntos)

- (a) Sean V y W dos espacios vectoriales, y $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Demuestra que el conjunto $\text{Ker } f$ es un subespacio vectorial de V .
- (b) En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ se considera el subespacio vectorial $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Encuentra un subespacio vectorial W tal que $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = V \oplus W$.

Ejercicio 2. (25 puntos)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un homomorfismo que verifica:

$$\text{Ker } f = \mathcal{L}(\{(1, 1, 1), (2, 1, 2), (0, 1, 0)\})$$

$$\text{Im } f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = 0, x + z + t = 0, z + t = 0\}$$

- (a) Halla una base del $\text{Ker } f$, y extiéndela a una base B de \mathbb{R}^3 .
- (b) Halla una base de $\text{Im } f$, y extiéndela a una base B' de \mathbb{R}^4 .
- (c) Halla la matriz de f respecto de las bases B y B' .
- (d) Halla su matriz de f respecto de las bases canónicas de \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^4 .

Ejercicio 3. (25 puntos)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido, respecto de la base canónica, por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla los autovalores de f y los subespacios propios asociados.
- (b) Estudia si f es diagonalizable y, en caso afirmativo, halla una base en la que su matriz sea diagonal.
- (c) Halla A^{198} .

Ejercicio 4. (25 puntos)

- (a) En \mathbb{R}^3 , dado el plano $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$, encuentra las ecuaciones de la simetría S_{π_2} respecto de π_2 .
- (b) Sea S_{π_1} la simetría respecto del plano $\pi_1 \equiv z = 1$, cuya ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Halla las ecuaciones del movimiento $M = S_{\pi_1} \circ S_{\pi_2}$, demuestra que es un giro y encuentra su eje.