

SOLUCIONES

Ejercicio 1. En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) + p(0) = 0, p(-1) + p(0) = 0\}$$

$$T = \mathcal{L}(\{-1 + x + x^2 + x^3, x + x^3, b(1 + x^2) + x^3, -1 + 2x + x^2 + bx^3\})$$

(a) Obtén las ecuaciones implícitas y paramétricas de S .

(b) Halla, según los valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$, las dimensiones de T , $S + T$ y $S \cap T$.

Solución: Respecto de la base usual, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$.

(a) Ecuaciones implícitas:

$$\begin{cases} p(1) + p(0) = 0 \\ p(-1) + p(0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2a_0 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_1 = \beta \\ a_2 = -2\alpha \\ a_3 = -\beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(b) Del apartado anterior, $\dim S = 2$ y una base

$$B_S = \{(1, 0, -2, 0) = 1 - 2x^2, (0, 1, 0, -1) = x - x^3\}$$

Haciendo operaciones elementales con los generadores de T y $S + T$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 0 & b & 1 \\ -1 & 2 & 1 & b \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 2b & b+1 \\ 0 & 1 & 0 & b-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$\dim(S + T) = 4 \quad \dim T = \begin{cases} 3 & , \text{ si } b = 0 \text{ o } b = 2 \\ 4 & , \text{ si } b \neq 0 \text{ y } b \neq 2 \end{cases}$$

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S + T) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } b = 0 \text{ o } b = 2 \\ 2 & , \text{ si } b \neq 0 \text{ y } b \neq 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que

$$f(1, 1, 0, 0) = (0, 1, 0, -1), \quad f(1, 0, 1, 0) = (1, 1, 1, 0), \quad \text{y} \quad \text{Ker } f = \text{Im } f$$

Halla su matriz respecto de la base canónica.

Solución: En \mathbb{R}^4 se considera la base canónica $B_c = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$, y la base

$$B = \{\mathbf{u}_1 = (1, 1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 1, 0, -1), \mathbf{u}_4 = (1, 1, 1, 0)\}$$

Según los datos del problema $f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_3$, $f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_4$ y $\text{Ker } f = \text{Im } f = \mathcal{L}(\{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\})$, es decir $f(\mathbf{u}_3) = f(\mathbf{u}_4) = \mathbf{0}$. Por lo tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) \\ f(\mathbf{u}_2) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_3) \\ f(\mathbf{u}_3) = f(\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{e}_4) \\ f(\mathbf{u}_4) = f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} = (0, 1, 0, -1) \\ = (1, 1, 1, 0) \\ = (0, 0, 0, 0) \\ = (0, 0, 0, 0) \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{e}_1) = (1, 2, 1, -1) \\ f(\mathbf{e}_2) = (-1, -1, -1, 0) \\ f(\mathbf{e}_3) = (0, -1, 0, 1) \\ f(\mathbf{e}_4) = (-1, -1, -1, 0) \end{array} \right.$$

La matriz de f , respecto de la base canónica, es

$$M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo sobre el espacio vectorial V de dimensión n . Define el concepto de endomorfismo diagonalizable y enuncia condiciones necesarias y suficientes para que f sea diagonalizable en \mathbb{R} .

Solución: Un endomorfismo es diagonalizable si existe una base respecto de la que su matriz es diagonal.

La condición necesaria y suficiente para que un endomorfismo sea diagonalizable en \mathbb{R} es que admita una base formada por autovectores, para lo que es necesario que todos sus autovalores sean reales y que la dimensión de cada subespacio propio coincida con la multiplicidad del autovalor correspondiente.

Ejercicio 4. En \mathbb{R}^4 , con el producto escalar usual, se considera el hiperplano

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0\}$$

Halla:

- (a) Una base ortonormal de H .
- (b) La distancia del vector $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 1, 1)$ al hiperplano H .
- (c) La proyección sobre H de la recta que pasa por $A(1, 0, 1, 1)$ y $B(2, 0, 0, 1)$.

Solución: Las ecuaciones paramétricas y una base de H son:

$$x_1 - x_3 - x_4 = 0 \implies \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \alpha - \gamma \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$B = \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 1), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, -1)\}$$

(a) Aplicando el proceso de Gram-Schmidt:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 0, 0, 1)$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_3 - \frac{-1}{2} \mathbf{v}_1 - \frac{0}{1} \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{-1}{2}\right) // (1, 0, 2, -1)$$

Dividiendo cada uno de los vectores obtenidos por su norma, se obtiene la base ortonormal:

$$B_{OTN} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1), \mathbf{w}_2 = (0, 1, 0, 0), \mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 0, 2, -1) \right\}$$

(b) Se halla la proyección del vector sobre H :

$$\begin{aligned} \text{proy}_H \overrightarrow{OA} &= (\overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 + (\overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_2 + (\overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{w}_3) \mathbf{w}_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} \mathbf{w}_1 + 0 \mathbf{w}_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_3 \\ &= (1, 0, 0, 1) + \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

y entonces, la distancia es

$$d(\overrightarrow{OA}, H) = \|\overrightarrow{OA} - \text{proy}_H \overrightarrow{OA}\| = \left\| \left(\frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(c) La proyección de la recta que pasa por A y B es la recta que pasa por los puntos

$$\begin{aligned} A' &= \overrightarrow{OA'} = \text{proy}_H \overrightarrow{OA} = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ B' &= \overrightarrow{OB'} = \text{proy}_H \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{w}_1) \mathbf{w}_1 + (\overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{w}_2) \mathbf{w}_2 + (\overrightarrow{OB} \cdot \mathbf{w}_3) \mathbf{w}_3 \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{w}_1 + 0 \mathbf{w}_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \mathbf{w}_3 = \left(\frac{3}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{6}, 0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{5}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

luego la recta proyección es

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{OA'} + \alpha \overrightarrow{A'B'} \implies (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) + \alpha \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Ejercicio 5.

(a) Halla las ecuaciones del movimiento $M = G_{P,\alpha} \circ S_r$, en \mathbb{R}^2 , que se obtiene al componer la simetría respecto de la recta $r \equiv x - \sqrt{3}y = 1$ con el giro de centro $P(1,0)$ y ángulo $\alpha = \pi/2$.

(b) Determina el tipo de movimiento que es M y halla, si existen, sus puntos fijos.

Solución:

(a) La matriz de la simetría $S_r(\mathbf{u}) = A_1\mathbf{u} + \mathbf{b}_1$ es

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

y, puesto que los puntos de la recta son fijos y $(1,0) \in r$, entonces

$$S_r(1,0) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

La matriz del giro $G_{P,\alpha}(\mathbf{u}) = A_2\mathbf{u} + \mathbf{b}_2$ es

$$A_2 = \begin{pmatrix} \cos \pi/2 & -\operatorname{sen} \pi/2 \\ \operatorname{sen} \pi/2 & \cos \pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y, puesto que el centro de giro $(1,0)$ es un punto fijo, entonces

$$G_{P,\alpha}(1,0) = A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones del movimiento son

$$M(\mathbf{u}) = G_{P,\alpha} \circ S_r(\mathbf{u}) = G_{P,\alpha}(S_r(\mathbf{u})) = A_2(A_1\mathbf{u} + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 = A_2A_1\mathbf{u} + A_2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

Operando:

$$M(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} + \mathbf{b} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

(b) Se halla el subespacio invariante $S(1)$ asociado a la matriz A :

$$(A - I)\mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \implies \begin{cases} -(\sqrt{3} + 2)x + y = 0 \\ x + (\sqrt{3} - 2)y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = (2 - \sqrt{3})y \\ y = \alpha \end{cases}$$

Puesto que $\dim S(1) = 1$, el movimiento es una simetría o simetría deslizante. Se buscan, si existen, los puntos fijos:

$$A\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{u} \implies (A - I)\mathbf{u} = -\mathbf{b} \implies \begin{cases} -(\sqrt{3} + 2)x + y = -2 - \sqrt{3} \\ x + (\sqrt{3} - 2)y = 1 \end{cases} \implies x + (\sqrt{3} - 2)y = 1$$

Luego los puntos fijos son los puntos de la recta $x + (\sqrt{3} - 2)y = 1$ y el movimiento es una simetría respecto de dicha recta.