EXAMEN FINAL DE JUNIO (9/06/00)

Ejercicio 1. (20 puntos)
En $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3, se consideran los subespacios vectoriales:

$$S = \{p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \, : \, p(1) + p(0) = 0, \, p(-1) + p(0) = 0\}$$
$$T = \mathcal{L}\left(\left\{-1 + x + x^2 + x^3, \, x + x^3, \, b(1 + x^2) + x^3, \, -1 + 2x + x^2 + bx^3\right\}\right)$$

(a) Obtén las ecuaciones implícitas y paramétricas de S.

(b) Halla, según los valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$, las dimensiones de T, $S + T$ y $S \cap T$.

Ejercicio 2. (20 puntos)
Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ un endomorfismo tal que

$$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)\,, \quad f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)\,, \quad \text{y} \quad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$$

Halla su matriz respecto de la base canónica.

Ejercicio 3. (10 puntos)
Sea $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo sobre el espacio vectorial V de dimensión n. Define el concepto de endomorfismo diagonalizable y enuncia condiciones necesarias y suficientes para que f sea diagonalizable en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. (25 puntos)
En $\mathbb{R}^4$, con el producto escalar usual, se considera el hiperplano

$$H = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \, : \, x_1 - x_3 - x_4 = 0\right\}$$

Halla:

(a) Una base ortonormal de H.

(b) La distancia del vector $\overrightarrow{OA} = (1,0,1,1)$ al hiperplano H.

(c) La proyección sobre H de la recta que pasa por $A(1,0,1,1)$ y $B(2,0,0,1)$.

Ejercicio 5. (25 puntos)

(a) Halla las ecuaciones del movimiento $M = G_{P,\alpha} \circ S_r$, en $\mathbb{R}^2$, que se obtiene al componer la simetría respecto de la recta $r \equiv x - \sqrt{3}y = 1$ con el giro de centro $P(1,0)$ y ángulo $\alpha = \pi/2$.

(b) Determina el tipo de movimiento que es M y halla, si existen, sus puntos fijos.