

SOLUCIONES

**Problema 1.** En  $\mathbb{R}^4$  se consideran los subespacios

$$S = L(\{(1, 0, -1, 2), (1, 1, 1, -1), (1, -2, -5, 8)\})$$

$$T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$$

- (a) Halla, si es posible, un subespacio que sea a la vez suplementario de  $S$  y de  $T$ .
- (b) Halla la dimensión y una base de los subespacios  $S \cap T$  y  $S + T$ .
- (c) Halla las ecuaciones implícitas del hiperplano paralelo a  $S$  que pasa por los puntos  $A(1, 0, 2, -1)$  y  $B(2, -1, 3, 1)$ .

**Solución:**

(a) Se halla una base de  $S$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -5 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde  $B_S = \{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 2, -3)\}$ , y una base de  $T$ :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = -\alpha + 2\beta \\ x_2 = -2\alpha + \beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

de donde  $B_T = \{\mathbf{v}_1 = (-1, -2, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, 1)\}$ , o mejor:

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \implies B'_T = \{\mathbf{v}'_1 = (1, 2, -1, 0), \mathbf{v}'_2 = (0, -3, 2, 1)\}$$

Estas dos bases se pueden extender, con los vectores  $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$  y  $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$ , para formar una base de  $\mathbb{R}^4$ , luego

$$R = L(\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$$

es, a la vez, suplementario de  $S$  y de  $T$ .

(b)  $S + T$  es el subespacio generado por  $B_S \cup B_T$ , luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$B_{S+T} = \{(1, 0, -1, 2), (0, 1, 2, -3), (0, 0, 1, -1)\} \quad \text{y} \quad \dim(S + T) = 3$$

y, por tanto,  $\dim(S \cap T) = 1$ . Para que un vector  $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = (\alpha, \beta, -\alpha + 2\beta, 2\alpha - 3\beta) \in S$  pertenezca también a  $T$ , ha de verificar sus ecuaciones implícitas, es decir:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta - 3(-\alpha + 2\beta) = 0 \\ \beta + 2(-\alpha + 2\beta) - (2\alpha - 3\beta) = 0 \end{cases} \implies \alpha - 2\beta = 0 \implies \alpha = 2\beta$$

Luego

$$S \cap T = \{\mathbf{u} = 2\beta \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = (2\beta, \beta, 0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\} = L(\{(2, 1, 0, 1)\})$$

y  $B_{S \cap T} = \{(2, 1, 0, 1)\}$ .

(c) Puesto que  $S = L(\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, -1, 2), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 2, -3)\})$ , el hiperplano pedido es

$$H \equiv \overrightarrow{OA} + L(\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \overrightarrow{AB}\})$$

con  $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1, 2)$ , cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \alpha + \gamma \\ x_2 = \beta - \gamma \\ x_3 = 2 - \alpha + 2\beta + \gamma \\ x_4 = -1 + 2\alpha - 3\beta + 2\gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Eliminando parámetros:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ -1 & 2 & 1 & x_3 - 2 \\ 2 & -3 & 2 & x_4 + 1 \end{array} \right) &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 2 & 2 & x_1 + x_3 - 3 \\ 0 & -3 & 0 & -2x_1 + x_4 + 3 \end{array} \right) \longrightarrow \\ \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2x_1 + 3x_2 + x_4 + 3 \end{array} \right) &\longrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & 4 & x_1 - 2x_2 + x_3 - 3 \\ 0 & 0 & 0 & -5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

la ecuación implícita del hiperplano es  $5x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3$ .

**Problema 2.** Sea  $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación lineal definida por

$$f(a + bx + cx^2) = (a + 2b + c, b + c, -a + b + 2c)$$

(a) Halla su matriz (respecto de las bases canónicas) y bases del núcleo e imagen.

(b) Halla una base de  $f^{-1}(L(\{(2, 1, 1)\}))$ .

(c) ¿Es un subespacio vectorial la imagen de todos los polinomios que se anulan en  $x = 0$ ? En caso afirmativo, halla una base de dicho subespacio.

(d) Si  $S$  es un subespacio suplementario de  $\text{Im } f$  en  $\mathbb{R}^3$ , ¿quién es  $f^{-1}(S)$ ?

**Solución:**

(a) La matriz de la aplicación lineal es

$$f(a + bx + cx^2) = f(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \implies M(f, B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una base de la imagen es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies B_{\text{Im } f} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 3)\}$$

Las ecuaciones del núcleo son:

$$f(a, b, c) = \mathbf{0} \implies \begin{cases} a + 2b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = \alpha \\ b = -\alpha \\ c = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

y una base  $B_{\text{Ker } f} = \{(1, -1, 1) = 1 - x + x^2\}$ .

(b) Se hallan las ecuaciones implícitas de  $L(\{(2, 1, 1)\})$ :

$$\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \implies \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(L(\{(2, 1, 1)\})) &= \{\mathbf{p} = (a, b, c) : f(a, b, c) = (a + 2b + c, b + c, -a + b + 2c) \in L(\{(2, 1, 1)\})\} \\ &= \left\{ \mathbf{p} = (a, b, c) : \begin{array}{l} a + 2b + c - 2(b + c) = 0 \\ a + 2b + c - 2(-a + b + 2c) = 0 \end{array} \right\} = \{\mathbf{p} = (a, b, c) : a - c = 0\} \end{aligned}$$

Una base es

$$a - c = 0 \implies \begin{cases} a = \alpha \\ b = \beta \\ c = \alpha \end{cases} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies B = \{(1, 0, 1) = 1 + x^2, (0, 1, 0) = x\}$$

(c) Si, pues el conjunto  $P$  de todos los polinomios que se anulan en  $x = 0$  es un subespacio vectorial:

$$P = \{\mathbf{p} = p(x) = a + bx + cx^2 : p(0) = 0\} = \{\mathbf{p} = bx + cx^2 : b, c \in \mathbb{R}\} = L(\{x, x^2\})$$

Además

$$f(P) = L(\{f(x), f(x^2)\}) = L(\{f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\}) = L(\{(2, 1, 1), (1, 1, 2)\})$$

de donde  $B_{f(P)} = \{(2, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ .

(d) Si  $\mathbb{R}^3 = S \oplus \text{Im } f$ , entonces  $S \cap \text{Im } f = \{\mathbf{0}\}$ , de donde

$$f^{-1}(S) = f^{-1}(\mathbf{0}) = \text{Ker } f$$