

SOLUCIONES

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$f(ax^2 + bx + c) = 2(a - c)x^2 + (c - a)x + b + 2c$$

1. Calcular la matriz de la aplicación f con respecto a la base usual de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
2. Calcular las ecuaciones implícitas de $\text{Ker } f$ y las ecuaciones paramétricas de $\text{Im } f$, especificando una base de cada uno de ellos.
3. Razonar si f es isomorfismo (biyectiva).
4. Calcular $f^{-1}(L\{2x^2 - x + 1\})$.

Solución:

1. Si $B = \{1, x, x^2\}$ es la base usual de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, entonces

$$f(c, b, a) = (b + 2c, c - a, 2a - 2c) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} \implies M(f, B) = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Las ecuaciones implícitas del núcleo son

$$f(c, b, a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} 2c + b = 0 \\ c - a = 0 \\ -2c + 2a = 0 \end{cases} \implies \text{Ker } f \equiv \begin{cases} c - a = 0 \\ 2c + b = 0 \end{cases}$$

de donde las ecuaciones paramétricas, y una base del núcleo, son

$$\text{Ker } f \equiv \begin{cases} c = \lambda \\ b = -2\lambda \\ a = \lambda \end{cases} \implies B_{\text{Ker } f} = \{(1, -2, 1)\} = \{1 - 2x + x^2\}$$

La imagen es el subespacio generado por las columnas de la matriz, luego

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \text{Im } f = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, -2)\})$$

de donde una base de la imagen, y sus ecuaciones paramétricas, son

$$B_{\text{Im } f} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -2)\} = \{1, x - 2x^2\} \quad \text{e} \quad \text{Im } f \equiv \begin{cases} c' = \lambda \\ b' = \mu \\ a' = -2\mu \end{cases}$$

3. Puesto que $\text{Ker } f \neq \{0\}$, f no es isomorfismo.

4. Se hallan las ecuaciones implícitas de $L(\{2x^2 - x + 1\})$:

$$L(\{2x^2 - x + 1\}) = L(\{(1, -1, 2)\}) \implies \begin{cases} c' = \lambda \\ b' = -\lambda \\ a' = 2\lambda \end{cases} \implies \begin{cases} c' + b' = 0 \\ 2c' - a' = 0 \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{aligned} f^{-1}(L\{2x^2 - x + 1\}) &= \{(c, b, a) : f(c, b, a) = (b + 2c, c - a, 2a - 2c) \in L(\{2x^2 - x + 1\})\} \\ &= \left\{ (c, b, a) : \begin{array}{l} (b + 2c) + (c - a) = 0 \\ 2(b + 2c) - (2a - 2c) = 0 \end{array} \right\} = \{(c, b, a) : 3c + b - a = 0\} \\ &= \left\{ (c, b, a) : \begin{array}{l} c = \lambda \\ b = \mu \\ a = 3\lambda + \mu \end{array} \right\} = L(\{(1, 0, 3), (0, 1, 1)\}) \\ &= L(\{1 + 3x^2, x + x^2\}) \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz de una aplicación ortogonal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ en la base canónica. Clasificar la aplicación f dando el plano de simetría y/o el eje y ángulo de giro, en su caso.

Solución:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

Puesto que $\lambda = 1$ es el único autovalor real, y su multiplicidad es uno, la aplicación f es un giro de eje $S(1)$. Las ecuaciones de $S(1)$ son:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

que corresponde a la recta $x = y = -z$ que pasa por el origen con vector de dirección $(1, 1, -1)$. El ángulo de giro es

$$\alpha = \arccos \frac{\text{traza}(A) - 1}{2} = \arccos \frac{-1}{2} = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$$

Ejercicio 3. Probar que si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores en un espacio euclídeo V , entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente.

Solución: Consultar la teoría de la asignatura.

Ejercicio 4. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^4 , con el producto escalar usual, se considera el subespacio vectorial

$$S = \{(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4 : x + z - u = 0\}$$

Se pide:

1. Dar una base ortonormal de S .
2. Hallar el complementario ortogonal de S .
3. Calcular la proyección ortogonal de $v = (1, 1, 1, 1)$ sobre S y la distancia de v a S .

Solución:

1. Las ecuaciones paramétricas y una base de S son

$$\begin{cases} x = -\beta + \gamma \\ y = \alpha \\ z = \beta \\ u = \gamma \end{cases} \implies B = \{v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (0, 1, 0, 0), v_3 = (-1, 0, 1, 0)\}$$

Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$u_1 = v_1 = (1, 0, 0, 1)$$

$$u_2 = v_2 = (0, 1, 0, 0)$$

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 = (-1, 0, 1, 0) - \frac{-1}{2}(1, 0, 0, 1) - \frac{0}{1}(0, 1, 0, 0) = \left(\frac{-1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}\right)$$

con lo que se obtiene la base ortogonal:

$$B_{OTG} = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, -2, -1)\}$$

y, normalizando, la base ortonormal:

$$B_{OTN} = \left\{ w_1 = \frac{(1, 0, 0, 1)}{\sqrt{2}}, w_2 = (0, 1, 0, 0), w_3 = \frac{(1, 0, -2, -1)}{\sqrt{6}} \right\}$$

2. La dimensión de S^\perp es

$$\dim S^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim S = 4 - 3 = 1$$

luego

$$\begin{aligned} S^\perp &= \{w = (a, b, c, d) : \langle w, w_1 \rangle = \langle w, w_2 \rangle = \langle w, w_3 \rangle = 0\} = \left\{ w = (a, b, c, d) : \begin{array}{l} a + d = 0 \\ b = 0 \\ a - 2c - d = 0 \end{array} \right\} \\ &= \{w = (\lambda, 0, \lambda, -\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\} = L(\{w = (1, 0, 1, -1)\}) \end{aligned}$$

3. Si $v = (1, 1, 1, 1)$, entonces

$$\begin{aligned} \text{proy}_S v &= \langle v, w_1 \rangle \cdot w_1 + \langle v, w_2 \rangle \cdot w_2 + \langle v, w_3 \rangle \cdot w_3 = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 0 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + \frac{-2}{\sqrt{6}} \cdot w_3 \\ &= (1, 0, 0, 1) + (0, 1, 0, 0) + \left(\frac{-1}{3}, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ d(v, S) &= \|\text{proy}_{S^\perp} v\| = \|v - \text{proy}_S v\| = \left\| \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Se considera la siguiente cónica: $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$.

1. Hallar su ecuación reducida, dando el giro y la traslación utilizadas.

2. Hallar el centro y los ejes. Dibujar la cónica del enunciado.

Solución:

1. La forma matricial de la cónica es

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 = 0$$

La matriz asociada y sus autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} ; \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$$

Los subespacios propios son

$$S(2) = \left\{ v : (A - 2I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x - y = 0\} = L(\{(1, 1)\})$$

$$S(4) = \left\{ v : (A - 4I)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x + y = 0\} = L(\{(-1, 1)\})$$

y los vectores que forman la base ortonormal de autovectores son

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \in S(2) \quad y \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \in S(4)$$

Aplicando a la cónica el giro

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con centro el origen y ángulo -45° , se obtiene

$$(x_1 \ y_1) P^t A P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

y operando:

$$2x_1^2 + 4y_1^2 = 2 \implies x_1^2 + \frac{y_1^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

que es la ecuación reducida de la cónica, que corresponde a una elipse. No es necesario usar traslaciones.

2. Aplicando el giro al centro y ejes de la cónica reducida, se obtienen el centro y ejes de la cónica original. Por lo tanto, el centro de la cónica es el origen, y los ejes son las rectas que pasan por el centro y cuyos vectores de dirección son los girados de los vectores $(1, 0)_1$ y $(0, 1)_1$, que coinciden con los vectores propios, luego:

$$\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la cónica es la de la figura.

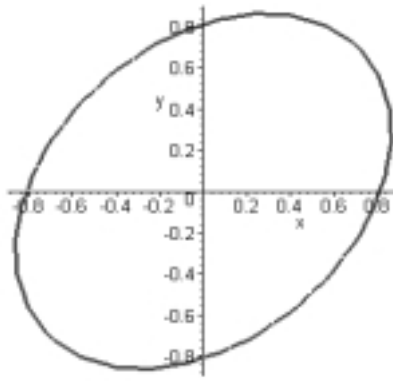


Figure 1: Representación gráfica de la cónica $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$