SOLUCIONES

<u>Problema 1</u>. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios vectoriales

$$S = L\left(\{(1,0,1,0),(1,-1,0,0)\}\right)$$
$$T = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \,:\, x_1 = 0\,,\, x_2 - x_3 = 0\}$$

Obtener bases de $S \cap T$ y de $S + T$.
Solución: Las ecuaciones paramétricas de S son

$$\begin{cases} x_1 = \alpha & +\beta \\ x_2 = & -\beta \\ x_3 = \alpha & \\ x_4 = 0 & \end{cases}$$

y, eliminando parámetros, se obtienen sus ecuaciones implícitas:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_1 - x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas, y una base de T son:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \Longrightarrow B_T = \{(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

Las ecuaciones implícitas y paramétricas de $S \cap T$ son:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

luego una base de $S \cap T$ es $B_{S\cap T} = \{(0,1,1,0)\}$.
El subespacio $S + T$ es generado por la unión de las bases de los dos subespacios, entre cuyos vectores se busca un sistema de generadores linealmente independientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego una base de $S + T$ es:

$$B_{S+T} = \{(1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,0,0,1)\}$$

<u>Problema 2</u>. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica, $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$, es

$$M(f, B_c) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. **Hallar las ecuaciones implícitas del núcleo y de la imagen.**
2. **Hallar la matriz del endomorfismo respecto de la base**

$$B = \{u_1 = (-1,1,1), u_2 = (1,-1,0), u_3 = (-1,0,2)\}$$

3. **Hallar los autovalores, subespacios propios asociados y, si es diagonalizable, dar la matriz diagonal y la matriz asociada de cambio de base.**

Solución:

1. Las ecuaciones implícitas del núcleo son

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2y + z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} 2x + 4y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{array} \right.$$

La imagen está generada por las imágenes de los vectores de la base, que son las columnas de la matriz de la aplicación.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego una base es $B_{\mathrm{Im}\, f} = \{(1,-1,1), (0,1,-2)\}$, de la que se obtienen sus ecuaciones paramétricas y, a partir de éstas eliminando parámetros, las implícitas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\alpha + \beta \\ z = \alpha - 2\beta \end{array} \right. \Longrightarrow x + 2y + z = 0$$

2. Sean $A = M(f, B_c)$, y $B = M(f, B)$. El cambio de base se puede expresar en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3_{B_c} & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3_{B_c} \\ \uparrow P & & \uparrow P \\ \mathbb{R}^3_{B} & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3_{B} \end{array} \qquad \text{donde} \qquad P = M(B, B_c) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde:

$$B = M(f, B) = P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 6 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. El polinomio caractrístico y sus autovalores son:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -1 & -3-\lambda & -1 \\ 2 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} \Longrightarrow \lambda(\lambda+1)^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & \text{(simple)} \\ \lambda = -1 & \text{(doble)} \end{cases}$$

Los subespacios propios son:

$$\begin{aligned} S(0) &= \{v \,:\, (A - 0 \cdot I)v = Av = 0\} = \operatorname{Ker} f = L\left(\{(1,-1,2)\}\right) \\ S(-1) &= \left\{ v \,:\, (A+I)v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v \,:\, x + 2y + z = 0\} = \\ &= L\left(\{(1,0,-1),(0,1,-2)\}\right) \end{aligned}$$

Puesto que el subespacio propio asociado al autovalor de multiplicidad dos tiene dimensión dos, la matriz es diagonalizable, siendo la matriz diagonal y la matriz del cambio de base, respectivamente:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

con $D = Q^{-1}AQ$.