

SOLUCIONES

Ejercicio 1. Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el subespacio vectorial

$$V(a) = L(\{(1, a, 1, 1), (1, a, 1 - a, 0), (0, 1, 2a, 2), (1, 1 + a, 1 + a, 2)\})$$

1. Hallar una base de $V(a)$.
2. Estudiar si, para algún $a \in \mathbb{R}$, el vector $u = (1, 1 + a, 1 + 2a, a + 3)$ pertenece a $V(a)$.
3. Obtener las dimensiones de los subespacios $V(0) + V(1)$ y $V(0) \cap V(1)$.

Solución:

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 1 & a & 1 - a & 0 \\ 1 & 1 + a & 1 + a & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego una base de $V(a)$ es:

$$B_{V(a)} = \{u_1 = (1, a, 1, 1), u_2 = (0, 1, 2a, 2), u_3 = (0, 0, a, 1)\}$$

2.

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 1 + a & 1 + 2a & a + 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & a + 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 2 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

luego $u \in V(a)$ sí y sólo sí $a = 0$.

3. Puesto que

$$B_{V(0)} = \{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 0, 1)\} \quad \text{y} \quad B_{V(1)} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 2), (0, 0, 1, 1)\}$$

entonces

$$V(0) + V(1) = L(B_{V(0)} \cup B_{V(1)}) = \mathbb{R}^4$$

de donde $\dim(V(0) + V(1)) = 4$, y de aquí:

$$\dim(V(0) \cap V(1)) = \dim V(0) + \dim V(1) - \dim(V(0) + V(1)) = 3 + 3 - 4 = 2$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por

$$f(a, b, c, d) = (a + b)x^2 + bx + (c - d)$$

1. Calcular la matriz de la aplicación con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^4 y usual de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.
2. Calcular las ecuaciones implícitas de $\text{Ker } f$ y las paramétricas de $\text{Im } f$, especificando una base de cada uno de ellos.
3. Razonar si f es monomorfismo (inyectiva), epimorfismo (sobreyectiva), isomorfismo (biyectiva).

Solución:

1. Considerando la base canónica B_c de \mathbb{R}^4 y la usual $B = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$,

$$f(a, b, c, d) = (c - d, b, a + b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad M(f, B_c, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Las ecuaciones implícitas del núcleo son:

$$f(a, b, c, d) = (c - d, b, a + b) = 0 \implies \begin{cases} c - d = 0 \\ b = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c - d = 0 \end{cases}$$

luego una base del núcleo es $B_{\text{Ker } f} = \{(0, 0, 1, 1)\}$. La imagen es

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= L(\{f(1, 0, 0, 0), f(0, 1, 0, 0), f(0, 0, 1, 0), f(0, 0, 0, 1)\}) \\ &= L(\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}) \\ &= L(\{(1, 0, 0) = 1, (0, 1, 0) = x, (0, 0, 1) = x^2\}) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

luego sus ecuaciones paramétricas y una base son:

$$\begin{cases} p_0 = \alpha \\ p_1 = \beta \\ p_2 = \gamma \end{cases} ; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad B_{\text{Im } f} = \{1, x, x^2\}$$

- 3.

$$\left. \begin{cases} \text{Ker } f \neq \{0\} \implies f \text{ no es monomorfismo} \\ \text{Im } f = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \implies f \text{ es epimorfismo} \end{cases} \right\} \implies f \text{ no es isomorfismo}$$

Ejercicio 3. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar los autovalores de A , los subespacios propios asociados y la matriz P de cambio de base tal que $D = P^{-1}AP$.
2. Demostrar que si λ y μ son dos autovalores distintos del endomorfismo f , y u y v son autovectores de f asociados a λ y μ , respectivamente, entonces el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente.

Solución:

1. El polinomio característico y sus autovalores son:

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \implies \begin{cases} \lambda = 0 & \text{(simple)} \\ \lambda = 1 & \text{(doble)} \end{cases}$$

Los subespacios propios son:

$$\begin{aligned} S(0) &= \left\{ v : (A - 0 \cdot I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ v : \begin{array}{l} y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{array} \right\} = \left\{ v : \begin{array}{l} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right\} = L(\{(1, 1, 1)\}) \\ S(1) &= \left\{ v : (A - I)v = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : -x + y - z = 0\} \\ &= L(\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}) \end{aligned}$$

Puesto que el subespacio propio asociado al autovalor de multiplicidad dos tiene dimensión dos, la matriz es diagonalizable, siendo la matriz diagonal y la matriz del cambio de base, respectivamente:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $D = P^{-1}AP$.

2. Consultar la teoría de la asignatura.

Ejercicio 4. Consideremos el subespacio vectorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$.

1. Dar una base ortonormal del subespacio S .
2. Calcular la proyección ortogonal de $v = (1, -1, 1)$ sobre S , y la distancia de v a S .
3. Obtener las ecuaciones, en la base canónica de \mathbb{R}^3 , de la simetría respecto del plano S .

Solución:

1. Una base ortogonal de S es $B_{OTG} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$, luego una base ortonormal es:

$$B_{OTN} = \left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), u_2 = (0, 1, 0) \right\}$$

2.

$$\text{proy}_S v = \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle v, u_2 \rangle \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 = (0, -1, 0)$$

$$d(v, S) = \|\text{proy}_{S^\perp} v\| = \|v - \text{proy}_S v\| = \|(1, 0, 1)\| = \sqrt{2}$$

3. La base ortogonal de S se completa con un vector $u_3 = (1, 0, 1) \in S^\perp$ para formar una base de \mathbb{R}^3 :

$$B = \{u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (1, 0, 1)\}$$

En esta base, la matriz de la simetría respecto del plano S es

$$M(f, B) = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz de cambio de la base B a la base canónica B_c :

$$M(B, B_c) = P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz de la simetría respecto de la base canónica, y sus ecuaciones son:

$$M(f, B_c) = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad f(x, y, z) = (-z, y, -x)$$

Ejercicio 5. Sea la cónica de ecuación $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$.

1. Hallar su ecuación reducida, dando el giro y la traslación utilizadas.
2. Hallar el centro y los ejes. Dibujar la cónica.

Solución:

1. La forma matricial de la cónica es

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$$

La matriz asociada y sus autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) \implies \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Los subespacios propios son

$$S(3) = \left\{ v : (A - 3I)v = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x - y = 0\} = L(\{(1, 1)\})$$

$$S(-1) = \left\{ v : (A + I)v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v : x + y = 0\} = L(\{(-1, 1)\})$$

y los vectores que forman la base ortonormal de autovectores son

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \in S(3) \quad \text{y} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) \in S(-1)$$

Aplicando a la cónica el giro

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

que corresponde a un giro de centro el origen y ángulo -45° , se obtiene

$$(x_1 \ y_1) P^t A P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (-1 \ 1) P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 1 = 0$$

y operando:

$$3x_1^2 - y_1^2 + \sqrt{2}y_1 + 1 = 0 \implies 3x_1^2 - \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

Si ahora se aplica la traslación

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

se llega a

$$3x_2^2 - y_2^2 = \frac{-3}{2} \implies \frac{x_2^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y_2^2}{\frac{3}{2}} = -1$$

que es la ecuación reducida de la cónica, que corresponde a una hipérbola.

2. Aplicando la traslación y el giro al centro y ejes de la cónica reducida, se obtienen el centro y ejes de la cónica original. El centro es

$$C = (0, 0)_2 \implies C = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_1 \implies C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \implies C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Los ejes son las rectas que pasan por el centro y cuyos vectores de dirección son los trasladados y girados de los vectores $(1, 0)_2$ y $(0, 1)_2$, que coinciden con los vectores propios, luego:

$$\begin{cases} \frac{x+\frac{1}{2}}{-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \\ \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \end{cases} \implies \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la cónica es la de la figura.

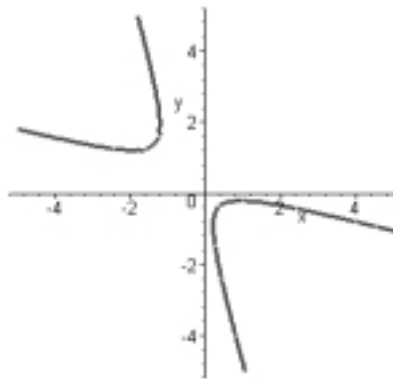


Figure 1: Representación gráfica de la cónica $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$