

Ejercicio 1. (15 puntos)

Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera el subespacio vectorial

$$V(a) = L(\{(1, a, 1, 1), (1, a, 1 - a, 0), (0, 1, 2a, 2), (1, 1 + a, 1 + a, 2)\})$$

1. Hallar una base de $V(a)$.
2. Estudiar si, para algún $a \in \mathbb{R}$, el vector $u = (1, 1 + a, 1 + 2a, a + 3)$ pertenece a $V(a)$.
3. Obtener las dimensiones de los subespacios $V(0) + V(1)$ y $V(0) \cap V(1)$.

Ejercicio 2. (15 puntos)

Sea $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ una aplicación lineal dada por $f(a, b, c, d) = (a + b)x^2 + bx + (c - d)$.

1. Calcular la matriz de la aplicación con respecto a las bases canónicas de \mathbb{R}^4 y usual de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
2. Calcular las ecuaciones implícitas de $\text{Ker } f$ y las paramétricas de $\text{Im } f$, especificando una base de cada uno de ellos.
3. Razonar si f es monomorfismo (inyectiva), epimorfismo (sobreyectiva), isomorfismo (biyectiva).

Ejercicio 3. (20 puntos)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar los autovalores de A , los subespacios propios asociados y la matriz P de cambio de base tal que $D = P^{-1}AP$.
2. Demostrar que si λ y μ son dos autovalores distintos del endomorfismo f , y u y v son autovectores de f asociados a λ y μ , respectivamente, entonces el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente.

Ejercicio 4. (25 puntos)

Consideremos el subespacio vectorial $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0\}$.

1. Dar una base ortonormal del subespacio S .
2. Calcular la proyección ortogonal de $v = (1, -1, 1)$ sobre S , y la distancia de v a S .
3. Obtener las ecuaciones, en la base canónica de \mathbb{R}^3 , de la simetría respecto del plano S .

Ejercicio 5. (25 puntos)

Sea la cónica de ecuación $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$.

1. Hallar su ecuación reducida, dando el giro y la traslación utilizadas.
2. Hallar el centro y los ejes. Dibujar la cónica.