9 Cónicas

9.1 Cónicas

Se llama **cónica** a cualquiera de las secciones planas que se producen al cortar en el espacio un doble cono recto por un plano.

Si el doble cono recto tiene vértice O, eje r y ángulo α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y el plano Π forma un ángulo β con el eje del cono, se pueden presentar los siguientes casos:

1. Si $\beta = \frac{\pi}{2}$, es decir si $r \perp \Pi$, la cónica es una **circunferencia** (si $O \notin \Pi$) o un **punto** (si $O \in \Pi$).
2. Si $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, la cónica es una **elipse** (si $O \notin \Pi$) o un **punto** (si $O \in \Pi$).
3. Si $\beta = \alpha$, la cónica es una **parábola** (si $O \notin \Pi$) o una **recta** (si $O \in \Pi$).
4. Si $0 \leq \beta < \alpha$, la cónica es una **hipérbola** (si $O \notin \Pi$) o un **par de rectas** (si $O \in \Pi$).

Cuando $O \in \Pi$, la cónica se llama **cónica degenerada**.

La ecuación analítica de una cónica es:

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$, que también se llama **ecuación general** de la cónica.

9.2 Ecuación reducida de una cónica

Mediante un movimiento (giro y/o traslación) la ecuación general de una cónica se reduce a una de las siguientes **ecuaciones reducidas**:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = p$, con $a, b > 0$ y $p = -1, 0, 1$ (cónica de tipo elíptico).
   - Si $p = 1$, la cónica reducida es
     - una **elipse**, si $a \neq b$, con centro el origen, ejes los cartesianos y focos en los puntos $(\pm c, 0)$, si $a > b$ ($c^2 = a^2 - b^2$), o $(0, \pm c)$, si $a < b$ ($c^2 = b^2 - a^2$).
     - una **circunferencia**, si $a = b$, con centro el origen y radio a.
   - Si $p = 0$, la cónica reducida es un **punto** (el origen).
   - Si $p = -1$, la cónica reducida carece de puntos, y se llama **elipse imaginaria**.
2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = p$, con $a, b > 0$ y $p = -1, 0, 1$ (cónica de tipo hiperbólico).
   - Si $p = 1$, la cónica reducida es una **hipérbola** con centro el origen, ejes los cartesianos y focos en los puntos $(\pm c, 0)$, con $c^2 = a^2 + b^2$.
   - Si $p = 0$, la cónica reducida es un **par de rectas secantes**.
   - Si $p = -1$, la cónica reducida es una **hipérbola** con centro el origen, ejes los cartesianos y focos en los puntos $(0, \pm c)$, con $c^2 = a^2 + b^2$.
3. $y^2 = 2px$, con $p \neq 0$ (cónica de tipo parabólico). La cónica reducida es una **parábola** con centro o vértice en el origen, ejes los cartesianos, foco $(\frac{p}{2}, 0)$ y directriz $x = -\frac{p}{2}$.

4. $x^2 = 2py$, con $p \neq 0$ (cónica de tipo parabólico). La cónica reducida es una **parábola** con centro el origen, ejes los cartesianos, foco $(0, \frac{p}{2})$ y directriz $y = -\frac{p}{2}$.

5. $y^2 = q$ o $x^2 = q$ (cónica de tipo parabólico). La cónica reducida es un **par de rectas paralelas** (si $q > 0$), una **recta doble** (si $q = 0$) o un **par de rectas imaginarias** (si $q < 0$).

9.3 Obtención de la ecuación reducida de una cónica

Sea

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$, la ecuación general de una cónica, que se puede expresar matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a = 0$$

donde la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es simétrica y, por tanto, diagonalizable ortogonalmente (respecto de una base ortonormal de autovectores). El proceso a seguir, para obtener la ecuación reducida, es el siguiente:

1. Si $a_{12} \neq 0$, los ejes de la cónica no son paralelos a los ejes cartesianos, por lo que se hace un giro para obtener una una cónica equivalente con los ejes paralelos a los cartesianos. Se determinan los autovalores de la matriz A, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, y una base ortonormal de autovectores $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ con $\left|\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}\right| = 1$. La matriz del cambio de base $P = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = M(B, B_c)$ es ortogonal, es decir $P^{-1} = P^t$, y se cumple que

$$P^{-1}AP = P^tAP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Aplicando el giro $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se tiene que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ y, sustituyendo en la ecuación de la cónica, queda:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} P^tAP \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + a = 0$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + a = 0$$

donde $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} P$. Operando, la ecuación de la cónica después del giro es

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + b_1x_1 + b_2y_1 + a = 0$$

que ya no tiene término en xy.
Si $a_{12} = 0$, los ejes de la cónica ya son paralelos a los cartesianos y se pasa directamente al paso siguiente.

2. Si $(b_1, b_2) \neq (0,0)$, el centro de la cónica (si es una cónica con centro) no es el origen o la cónica (si no tiene centro) no pasa por el origen. En este caso se aplica una traslación para que el centro (si es una cónica con centro) sea el origen o la cónica (si no tiene centro) pase por el origen. Se pueden presentar los siguientes casos:

   (a) Si $\delta = |A| = \lambda_1\lambda_2 > 0$, la cónica es de tipo elíptico. Completando cuadrados en su expresión:

   $$\lambda_1\left(x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 = \frac{b_1^2}{4\lambda_1} + \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a = c$$

   Aplicando la traslación $\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \frac{b_1}{2\lambda_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{array}\right.$, se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

   $$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c \quad \text{que es} \left\{\begin{array}{l} \text{una elipse real, si } c\lambda_1 > 0 \\ \text{un punto, si } c = 0 \\ \text{una elipse imaginaria, si } c\lambda_1 < 0 \end{array}\right.$$

   (b) Si $\delta = |A| = \lambda_1\lambda_2 < 0$, la cónica es de tipo hiperbólico. Completando cuadrados como en el apartado anterior, y aplicando la misma traslación, se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

   $$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 = c \quad \text{que es} \left\{\begin{array}{l} \text{una hipérbola, si } c \neq 0 \\ \text{un par de rectas secantes, si } c = 0 \end{array}\right.$$

   (c) Si $\delta = |A| = \lambda_1\lambda_2 = 0$, la cónica es de tipo parabólico. Se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$ (los dos no se pueden anular simultáneamente), la expresión de la cónica sería:

   $$\lambda_2 y_1^2 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + a = 0$$

   Completando cuadrados, se obtiene

   $$\lambda_2\left(y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2}\right)^2 = \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a - b_1 x_1$$

   Entonces:

   i. Si $b_1 \neq 0$, aplicando la traslación $\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 + \frac{a}{b_1} - \frac{b_2^2}{4\lambda_2 b_1} \\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{array}\right.$, se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

   $$\lambda_2 y_2^2 = -b_1 x_2 \quad \text{que es una parábola}$$

   ii. Si $b_1 = 0$, aplicando la traslación $\left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 + \frac{b_2}{2\lambda_2} \end{array}\right.$, se obtiene la ecuación reducida de la cónica:

   $$\lambda_2 y_2^2 = \frac{b_2^2}{4\lambda_2} - a = c \quad \text{que es} \left\{\begin{array}{l} \text{un par de rectas paralelas, si } c\lambda_2 > 0 \\ \text{una recta doble, si } c = 0 \\ \text{un par de rectas imaginarias, si } c\lambda_2 < 0 \end{array}\right.$$

   Si $b_1 = b_2 = 0$, el centro de la cónica (si es una cónica con centro) es el origen o la cónica (si no tiene centro) pasa por el origen, y la ecuación obtenida después del giro es la ecuación reducida de la cónica.

9.4 Centro o vértice, y ejes de una cónica no degenerada

Cuando la cónica es no degenerada, su centro o vértice se obtiene aplicando al origen (que es el centro o vértice de la cónica reducida) los movimientos inversos a los usados para obtener la ecuación reducida: en primer lugar la traslación de vector opuesto, y después el giro de ángulo opuesto.
Si la cónica es una elipse o una hipérbola, sus ejes son las rectas que pasan por el centro de la cónica con la dirección de los autovectores de la matriz A.
Si la cónica es una parábola, su eje principal es la recta que pasa por el centro con la dirección del autovector asociado al autovalor nulo, y su eje secundario es la recta que pasa por el centro con la dirección del autovector asociado al autovalor no nulo.

9.5 Ejemplos

1. Para hallar la ecuación reducida de la cónica $3x^2+3y^2-2xy-2=0$, se expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 = 0$$

La matriz asociada y sus autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-4) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 4 \end{array} \right.$$

Los subespacios propios son

$$S(2) = \left\{ v \,:\, (A-2I)v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v \,:\, x-y=0\} = L\left(\{(1,1)\}\right)$$
$$S(4) = \left\{ v \,:\, (A-4I)v = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v \,:\, x+y=0\} = L\left(\{(-1,1)\}\right)$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad P^tAP = D$$

Aplicando a la cónica el giro

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con centro el origen y ángulo -45^o, se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} P^tAP \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - 2 = 0$$

y operando:

$$2x_1^2 + 4y_1^2 = 2 \Longrightarrow x_1^2 + \frac{y_1^2}{1/2} = 1$$

que es la ecuación reducida de la cónica, que corresponde a una elipse. No es necesario usar traslaciones. La ecuación reducida también se suele expresar renombrando las variables (x_1, y_1) como (x, y), es decir como

$$x^2 + \frac{y^2}{1/2} = 1$$

Puesto que no se ha aplicado traslación, el centro de la elipse coincide con el de la cónica reducida, es decir es el origen. Sus ejes son las rectas que pasan por el origen con la dirección de los autovectores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{-1} = \frac{y}{1} \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{1} \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{array} \right.$$

La representación gráfica de la cónica es la de la figura.

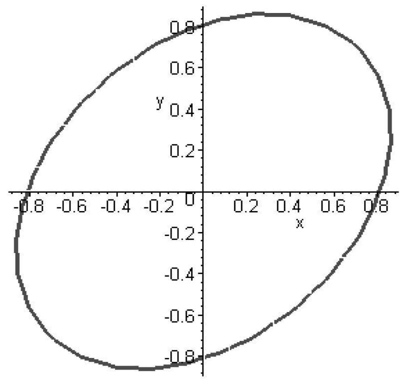

Figure 1: Representación gráfica de la cónica $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 2 = 0$

2. Para hallar la ecuación reducida de la cónica $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$, se expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1 = 0$$

La matriz asociada y sus autovalores son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{array} \right.$$

Los subespacios propios son

$$S(3) = \left\{ v \,:\, (A - 3I)v = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v \,:\, x - y = 0\} = L\left(\{(1,1)\}\right)$$

$$S(-1) = \left\{ v \,:\, (A + I)v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} = \{v \,:\, x + y = 0\} = L\left(\{(-1,1)\}\right)$$

La matriz diagonal y la matriz de paso son:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad P^t A P = D$$

Aplicando a la cónica el giro

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

con centro el origen y ángulo -45^o, se obtiene

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix} P^t A P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 1 = 0$$

y operando:

$$3x_1^2 - y_1^2 + \sqrt{2} y_1 + 1 = 0 \Longrightarrow 3x_1^2 - \left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = -\frac{3}{2}$$

Si ahora se aplica la traslación

$$\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

se llega a

$$3x_2^2 - y_2^2 = \frac{-3}{2} \Longrightarrow \frac{x_2^2}{1/2} - \frac{y_2^2}{3/2} = -1$$

que es la ecuación reducida de la cónica, que corresponde a una hipérbola. La ecuación reducida también se suele expresar renombrando las variables (x_2, y_2) como (x, y), es decir como

$$\frac{x^2}{1/2} - \frac{y^2}{3/2} = -1$$

Aplicando la traslación opuesta y el giro inverso al centro de la cónica reducida, se obtienen el centro de la cónica original. El centro es

$$C = (0,0)_2 \Longrightarrow C = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})_1 \Longrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow C = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Los ejes son las rectas que pasan por el centro y cuyos vectores de dirección son los vectores propios, es decir:

$$\begin{cases} \frac{x+\frac{1}{2}}{-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \\ \frac{x+\frac{1}{2}}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

La representación gráfica de la cónica es la de la figura.

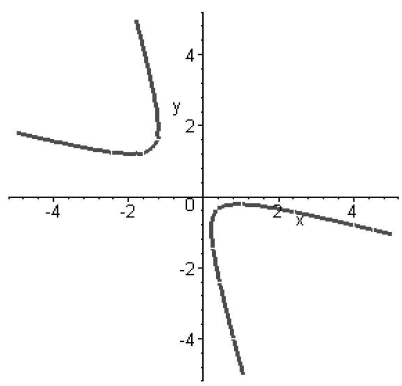

Figure 2: Representación gráfica de la cónica $x^2 + y^2 + 4xy - x + y + 1 = 0$

9.6 Clasificación de cónicas por invariantes

Para clasificar una cónica, de ecuación general

$$a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a = 0$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$, no es necesario encontrar el movimiento (giro y/o traslación) que la transforma en su ecuación reducida. Se puede hacer a partir de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_1}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{22} & \frac{a_2}{2} \\ \frac{a_1}{2} & \frac{a_2}{2} & a \end{pmatrix}$$

Si $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ son los autovalores de A, $\delta = |A|$ y $\Delta = \left|\overline{A}\right|$, entonces:

	Tipo	**Ecuación reducida**	**Cónica**
$\delta > 0$	Elíptico	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \frac{-\Delta}{\delta}$	Elipse real, si $\lambda_1 \Delta < 0$
			Elipse imaginaria, si $\lambda_1 \Delta > 0$
			Punto, si $\Delta = 0$
$\delta < 0$	Hiperbólico	$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = \frac{-\Delta}{\delta}$	Hipérbola, si $\Delta \neq 0$
			Par de rectas secantes, si $\Delta = 0$
$\delta = 0$ ($\lambda_1 = 0$) ($\lambda_2 \neq 0$)	Parabólico	$\lambda_2 y^2 = \pm 2\sqrt{\frac{-\Delta}{\lambda_2}}x$	Parábola, si $\Delta \neq 0$
		$\lambda_2 y^2 = c$	Par de rectas paralelas, si $\Delta = 0$ y $c\lambda_2 > 0$
			Recta doble, si $\Delta = 0$ y $c = 0$
			Par de rectas imaginarias, si $\Delta = 0$ y $c\lambda_2 < 0$