

HOJA N.2 ESPACIOS VECTORIALES. (6/03/2007)

soluciones a ejercicios seleccionados

EJERCICIO 6.) Estudiar la dependencia o independencia lineal de los conjuntos de vectores de \mathbb{R}^3 :

a) $\{(0,1,0), (1,1,-1), (-1,0,1)\}$

b) $\{(0,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$

c) $\{(0,0,1), (0,1,0), (1,1,1)\}$

d) $\{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,0)\}$

a)

los vectores son lin. dependientes

b)

los vectores son lin. independientes

c)

los vectores son lin. independientes

d)

los vectores son lin. dependientes

EJERCICIO 7. DEPENDENCIA LINEAL de polinomios Estudiar la dependencia o independencia lineal de los conjuntos de vectores de $P_2(\mathbb{R})$

a) $\{1, 1+x, 1+x+x^2\}$

b) $\{x, x^2, x+x^2\}$

c) $\{1-x^2, 1+x, x^2-x, x+x^2\}$

d) $\{1+x^2, 2+x^2\}$

a)

los vectores son lin. independientes

b)

los vectores son lin. dependientes

c)

los vectores son lin. dependientes

d)

los vectores son lin. independientes

EJERCICIO 9. Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes o independientes y en caso de que sean linealmente dependientes, encontrar una combinación lineal entre ellos y un subconjunto con un número máximo de vectores linealmente independientes:

a) $\{(3,5,1), (2,1,3)\}$

b) $\{(1,2,3), (1,3,2), (0,-1,1)\}$

c) $\{(1,0,1,0), (2,1,3,1), (0,1,1,1), (2,2,4,2)\}$

d) Lo mismo en el espacio de polinomios de $P_2(\mathbb{R})$, $\{1+3x+4x^2, 4+x^2, 3+x+2x^2\}$.

a)

los vectores son lin. independientes

>

b)

los vectores son lin. dependientes

$$ctes := [-t_1, -t_1, -t_1]$$

"los vectores se pueden combinar lin. para dar el vector nulo como sigue" ,

$$-t_1 [1, 2, 3] + -t_1 [1, 3, 2] + -t_1 [0, -1, 1] = 0$$

>

c)

los vectores son lin. dependientes

$$ctes := [2 -t_1 + 2 -t_2, -t_1 - 2 -t_2, -t_1, -t_2]$$

"los vectores se pueden combinar lin. para dar el vector nulo como sigue" ,

$$(2 -t_1 + 2 -t_2) [1, 0, 1, 0] + (-t_1 - 2 -t_2) [2, 1, 3, 1] + -t_1 [0, 1, 1, 1] + -t_2 [2, 2, 4, 2] = 0$$

>

d)

los polinomios son lin. dependientes

$$ctes := [-t_1, 2 -t_1, -3 -t_1]$$

"los polinomios se pueden combinar lin. para dar el polinomio nulo como sigue" ,

$$-t_1 (4x^2 + 3x + 1) + 2 -t_1 (x^2 + 4) - 3 -t_1 (2x^2 + x + 3) = 0$$

EJERCICIO 11. ¿Para qué valores de a el conjunto $\{(a,1,0), (1,a,1), (0,1,a)\}$ es base de \mathbb{R}^3 ? Para $a=2$ calcular las coordenadas del vector $v=(-1,1,3)$ respecto de dicha base.

la matriz triangular superior eqv. a la matriz que reúne a los tres vectores es

$$\begin{matrix} \hat{e}_1 & a & 1 & 0 & \hat{u}_1 \\ \hat{e}_2 & 0 & a & a^2 & \hat{u}_2 \\ \hat{e}_3 & 0 & 0 & -a^3 + 2a & \hat{u}_3 \end{matrix}$$

los vect. serán l. ind. cuando a sea distinto de , $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

"los vectores de la base se pueden combinar lin. para dar el vector" , $[-1, 1, 3]$, " como sigue" ,

$$-\frac{1}{2} [2, 1, 0] + \frac{3}{2} [0, 1, 2] = [-1, 1, 3]$$

EJERCICIO 13. En $P_3(\mathbb{R})$ se considera la base $\{1, (1-x), (1-x)^2, (1-x)^3\}$. Obtener las coordenadas de $2-3x+x^2+2x^3$ respecto de la base anterior. Indicación: dividir por $1-x$.

los polinomios son lin. independientes

$R := [$ "los polinomios de la base se pueden combinar lin. para dar el polin. dado como sigue" ,
 $2I - 5 \parallel (1-x) + 7 \parallel (1-2x+x^2) - 2 \parallel (1-3x+3x^2-x^3) = \parallel (2x^3+x^2-3x+2)]$

Ejercicio 14. En $P_2(\mathbb{R})$ se considera el conjunto $\{1, x+3, (x+3)^2\}$. Probar que es base de $P_2(\mathbb{R})$ y calcular las coordenadas de $a+bx+cx^2$ respecto de dicha base.

los polinomios son lin. independientes

"los polinomios de la base se pueden combinar lin. para dar el polin. dado como sigue" ,
 $(9u - 3v + w)I + (-6u + v) \parallel (x+3) + u \parallel (x^2 + 6x + 9) = \parallel (ux^2 + vx + w)$

Ejercicio 3. Demostrar que los conjuntos de vectores de \mathbb{R}^3 : $A=\{(1,0,-1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ y $B=\{(2,1,-1), (1,2,1)\}$ generan el mismo espacio vectorial. Demostrar que el conjunto $C=\{(2,1,-1), (1,-1,0)\}$ no genera dicho espacio

la matriz triangular superior eqv. a la matriz que reúne a los tres vectores de A es

$$\begin{pmatrix} \hat{e} & 1 & 0 & -1 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 1 & 1 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz triangular superior eqv. a la matriz que reúne a los dos vectores de B es

$$\begin{pmatrix} \hat{e} & 1 & 0 & -1 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 1 & 1 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \end{pmatrix}$$

Al coincidir las dos primeras filas de las dos matrices, queda probado que ambos conjuntos de vectores, A y B, generan el mismo sev. de dim. dos

la matriz triangular superior eqv. a la matriz que reúne a los dos vectores de C es

$$\begin{pmatrix} \hat{e} & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ \hat{e} & & & \hat{u} \end{pmatrix}$$

Al ser distinta de las dos anteriores queda probado que el sev. generado por C es distinto del generado por los vectores de A o de B

Ejercicio 2. Averiguar si los vectores $a=(1,-1,0)$ y $b=(2,-3,1)$ pertenecen al espacio vectorial generado por el conjunto de vectores $\{v_1=(2,5,1), v_2=(3,4,1), v_3=(5,9,2)\}$.

la matriz triangular superior eqv. a la matriz que reúne a los tres vectores dados es

$$\begin{pmatrix} \hat{e} & 2 & 5 & 1 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & -7 & -1 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así, se trata de un sev. de dim. dos con base, p. ej. $B=\{ \parallel ([2, 5, 1]) \parallel ([3, 4, 1]) \parallel \}$

"los vectores de la base se pueden combinar lin. para dar el vector" $[1, -1, 0]$, " como sigue" ,
 $-[2, 5, 1] + [3, 4, 1] = [1, -1, 0]$

$$A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

"el vector no pertenece al sev. dado pues el rango de la matriz que contiene a la base del sev. y el vector dado vale ", 3

Ejercicio 10. Hallar una base del espacio vectorial generado por el conjunto de vectores

$$\{v_1=(3,2,0,5), v_2=(-1,0,3,-4), v_3=(2,2,3,1), v_4=(0,2,-9,17)\}.$$

Como la triangular eqv. a la matriz que reúne por columnas a los vectores dados es ,

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se deduce que una base del sev. puede estar formada por los vectores primero, segundo y cuarto ,
 $[3, 2, 0, 5], [-1, 0, 3, -4], [0, 2, -9, 17]$

Ejercicio 12. Se consideran los vectores $(1+a,1,1,1), (1,1+a,1,1), (1,1,1+a,1)$ y $(1,1,1,1+a)$. Determinar en función del parámetro a la dimensión y una base del espacio vectorial que generan.

>

la matriz triangular superior eqv. a la matriz que reúne a los tres vectores es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

los vect. serán l. ind. cuando a sea distinto de , { }

Para $a=0$ el sev. generado por los vectores es de dimensión 1, y una base del mismo es, p. ej. $B=\{ \parallel ([2, 0, 0, 0]) \parallel \}$

Para $a=-4$ el sev. generado por los vectores es de dimensión 4 , y una base del mismo es, p. ej. $B=\{ \parallel ([2, -4, -4, -4]) \parallel \parallel ([-4, 2, -4, -4]) \parallel \parallel ([-4, -4, 2, -4]) \parallel \}$

>

Ejercicio 16. Encontrar el subespacio vectorial de las soluciones del siguiente sistema:

$$x+2y-3t+w=0, x+2y+z-4t-w=0, y+z-2t-w=0, x+z-2t-3w=0,$$

dar un sistema de generadores de dicho subespacio, una base y su dimensión.

$$\text{solucion} := [v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_1 + 2v_2, v_1, v_2]$$

$$\text{solucion} := [v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_1 + 2v_2, v_1, v_2]$$

la dimensión del subespacio solución vale: 2

Una base de dicho subespacio es, p. ej. $\{[1,1,1,0],[1,-1,2,0,1]\}$

Ejercicio 21. Dados los subespacios vectoriales: $V1 = \{a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y $V2 = \{c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w} \mid c, d, e \in \mathbb{R}\}$ obtener una base y la dimensión de los espacios $V1, V2, V1+V2, V1 \cap V2$.

$$\text{El primer sev. es : } a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a, b \text{ reales}$$

$$\text{El segundo sev. es : } c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c, d, e \text{ reales}$$

Como las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, son l.i. (pues el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vale 2,) forman una base del primer sev.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ vale } 2, \text{) forman una base del primer sev.}$$

Como las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, son l.i. (pues el rango de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, vale 3,) forman una base del segundo sev.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vale } 3, \text{) forman una base del segundo sev.}$$

igualando las matrices- representantes de ambos, se obtiene que son comunes a ambas $\begin{pmatrix} a \\ c \\ c \\ e \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \quad \text{tales que } \{b = -e, c = 0, e = e, d = -e, a = 0\}$$

entonces la intersección tiene de dimensión uno y como sus elementos son de la forma $\begin{pmatrix} a \\ c \\ c \\ e \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{una base de la intersección es la formada p.ej. por la matriz } \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -1 \\ c & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

completamos la base anterior hasta obtener una base de cada uno de los se.

$$\text{"base}(V) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{"base}(W) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{"base}(V+W) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

-