

## ESPACIOS EUCLÍDEOS(soluciones) Gpo.12-m2 (10/5/07)

**Ejercicio 4.** Sea  $W = L\{u_1 = (1, 2, 0, 0), u_2 = (1, 0, 0, 2), u_3 = (1, 1, 1, 2)\} \subset \mathbb{R}^4$  con el producto usual.

(a) Encontrar una base ortonormal de  $W$ .

(b) Completar dicha base hasta una de  $\mathbb{R}^4$ .

**a)**

>

$$base_{ort} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{15} \sqrt{6} \sqrt{5}, -\frac{1}{30} \sqrt{6} \sqrt{5}, 0, \frac{1}{6} \sqrt{6} \sqrt{5} \\ & \frac{1}{5} \sqrt{5}, \frac{2}{5} \sqrt{5}, 0, 0 \\ & \frac{1}{21} \sqrt{7} \sqrt{6}, -\frac{1}{42} \sqrt{7} \sqrt{6}, -\frac{1}{7} \sqrt{7} \sqrt{6}, -\frac{1}{42} \sqrt{7} \sqrt{6} \end{aligned} \right\}$$

**b)**

>

$$base_{ort} := \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{15} \sqrt{6} \sqrt{5}, -\frac{1}{30} \sqrt{6} \sqrt{5}, 0, \frac{1}{6} \sqrt{6} \sqrt{5} \\ & \frac{1}{5} \sqrt{5}, \frac{2}{5} \sqrt{5}, 0, 0 \\ & \frac{1}{21} \sqrt{7} \sqrt{6}, -\frac{1}{42} \sqrt{7} \sqrt{6}, -\frac{1}{7} \sqrt{7} \sqrt{6}, -\frac{1}{42} \sqrt{7} \sqrt{6} \\ & -\frac{2}{7} \sqrt{7}, \frac{1}{7} \sqrt{7}, -\frac{1}{7} \sqrt{7}, \frac{1}{7} \sqrt{7} \end{aligned} \right\}$$

>

**Ejercicio 7.** Dar la proyección ortogonal de  $(0, 2, 1, -1)$  sobre el subespacio de  $\mathbb{R}^4$   $U = \{(x, y, z, t) \mid x+y=0\}$  considerando el producto escalar usual.

$$base_{ort} := \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \sqrt{2}, 0, 0 \\ & [0, 0, 1, 0], [0, 0, 0, 1] \end{aligned} \right\}$$

$$proy := [-1, 1, 1, -1]$$

**Ejercicio 9.** En un espacio vectorial euclídeo, cuyo producto escalar tiene como matriz  $(GR := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix})$  en la base  $B =$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ , encontrar la proyección ortogonal de  $u_3$  sobre  $L\{u_1, u_2\}$ .

$$(P(u_3) \parallel) = \frac{x}{c} - \frac{1}{2} \frac{0}{0}$$

**Ejercicio 10.** En  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar que respecto de la base canónica tiene por matriz:

y sea  $U = \{(x,y,z) / x = z\}$ .

$$GR := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (a) \text{ Calcular el ángulo que forman los vectores } (1,0,0) \text{ y } (0,1,0).$$

(b) Localizar una base de  $U^\perp$

(c) Encontrar la proyección ortogonal de  $(1, 2, 0)$  sobre  $U^\perp$

**a)**

$$\text{coseno} := \frac{1}{2}$$

**b)**

$$\text{Ecuacion} := x_1 + x_2 = 0$$

$$B(\text{ort}(U)) = \{ [1, -1, 0], [0, 0, 1] \}$$

$$\text{la base ortonormal correspondiente es } B^*(\text{ort}(U)) = \left\{ [1, -1, 0], \frac{1}{\sqrt{2}} [1, -1, 1] \right\}$$

**c)**

$$\text{el vector proy. es: } \left( \frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-1}{2} \right)$$

**Ejercicio 11.** En  $\mathbb{R}^3$  con la base canónica  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  se considera el producto escalar que verifica:

$\|e_1\| = \|e_2\| = \|e_3\| = 1$  y  $\text{ángulo}(e_i, e_j) = 60^\circ$  para  $i \neq j$  con  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Hallar:

(a) La matriz de Gram en  $B$ .

(b) La distancia del punto  $P = (1, 2, 3)$  al origen.

(c) Las ecuaciones de la proyección ortogonal de la recta  $x = y = z$  sobre el plano  $y = 0$ .

**a)**

$$GR := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

>

b)

$$\text{distancia} := 5$$

c)

Una base ortonormal de  $y=0$  es  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

se proyecta  $x=y=z$  en la recta de vector director  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 12.** En  $\mathbb{R}^4$  con el producto usual hallar la distancia de  $(1, 0, -1, 0)$  a  $S = \{x + y - 0z + 0w = 0\}$ . Calcular  $S^\perp$ .

$(1, 0, -1, 0)$

$a$

una base ortonormal de  $S$  es :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3}\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{15}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{2}{15}\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{proy} := \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\text{dist} := \frac{1}{5} \sqrt{35}$$

las ecs. del subespacio ortogonal son:  $\{x_1 - x_2 + x_3 = 0, -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$

**Ejercicio 13.** En  $\mathbb{R}^3$  se considera el producto escalar definido por la matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  y se define  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $f(x) = \langle a, x \rangle b$  con  $a, b \in \mathbb{R}^3$  fijos. Hallar los autovalores de  $f$ ,  $\text{Ker}(f)$  e  $\text{Im}(f)$ . ¿Cuál es el plano ortogonal al vector  $b = (1, 1, 0)$ ?

$$f := x \otimes \text{evalm}(\text{innerprod}(a, GR, x) b)$$

las imágenes de los vectores de la base canón. son, respectivamente:

$$[(a_1 + a_2 + 2a_3) b_1, (a_1 + a_2 + 2a_3) b_2, (a_1 + a_2 + 2a_3) b_3],$$

$$[(a_1 + 2a_2 + 2a_3) b_1, (a_1 + 2a_2 + 2a_3) b_2, (a_1 + 2a_2 + 2a_3) b_3],$$

$$[(2a_1 + 2a_2 + 3a_3) b_1, (2a_1 + 2a_2 + 3a_3) b_2, (2a_1 + 2a_2 + 3a_3) b_3]$$

por lo que la matriz del endom. con respecto a la b. canón. será:

$$\begin{pmatrix} (a_1 + a_2 + 2a_3) b_1 & (a_1 + 2a_2 + 2a_3) b_1 & (2a_1 + 2a_2 + 3a_3) b_1 \\ (a_1 + a_2 + 2a_3) b_2 & (a_1 + 2a_2 + 2a_3) b_2 & (2a_1 + 2a_2 + 3a_3) b_2 \\ (a_1 + a_2 + 2a_3) b_3 & (a_1 + 2a_2 + 2a_3) b_3 & (2a_1 + 2a_2 + 3a_3) b_3 \end{pmatrix}$$

[ una base de  $Im(f)$  es el vector: ,  $[(a_1 + a_2 + 2 a_3) b_1, (a_1 + a_2 + 2 a_3) b_2, (a_1 + a_2 + 2 a_3) b_3]$ ]

[ una base de  $Ker(f)$  es el par de vectores : ,

$$\begin{pmatrix} \dot{1} \\ \dot{1} \\ \dot{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{matrix} \begin{matrix} 0, 1, - \\ \frac{a_1 + 2 a_2 + 2 a_3}{2 a_1 + 2 a_2 + 3 a_3} \end{matrix} \begin{matrix} \grave{u} \\ \grave{u} \\ \grave{u} \end{matrix}, \begin{pmatrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{pmatrix} \begin{matrix} 1, 0, - \\ \frac{a_1 + a_2 + 2 a_3}{2 a_1 + 2 a_2 + 3 a_3} \end{matrix} \begin{matrix} \grave{u} \\ \grave{u} \\ \grave{u} \end{matrix}$$

[ +

El autosistema de,  $\begin{pmatrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{pmatrix} \begin{matrix} (a_1 + a_2 + 2 a_3) b_1 \\ (a_1 + a_2 + 2 a_3) b_2 \\ (a_1 + a_2 + 2 a_3) b_3 \end{matrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{pmatrix} \begin{matrix} (a_1 + 2 a_2 + 2 a_3) b_1 \\ (a_1 + 2 a_2 + 2 a_3) b_2 \\ (a_1 + 2 a_2 + 2 a_3) b_3 \end{matrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{pmatrix} \begin{matrix} (2 a_1 + 2 a_2 + 3 a_3) b_1 \\ (2 a_1 + 2 a_2 + 3 a_3) b_2 \\ (2 a_1 + 2 a_2 + 3 a_3) b_3 \end{matrix}$ , es :

0, de mult.alg , 2, con  $B(Ker(A-, 0, I))=$  ,

$$\begin{pmatrix} \dot{1} \\ \dot{1} \\ \dot{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{matrix} \begin{matrix} - \\ \frac{a_1 + 2 a_2 + 2 a_3}{a_1 + a_2 + 2 a_3} \\ 1, 0 \end{matrix} \begin{matrix} \grave{u} \\ \grave{u} \\ \grave{u} \end{matrix}, \begin{pmatrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ \frac{2 a_1 + 2 a_2 + 3 a_3}{a_1 + a_2 + 2 a_3} \\ 0, 1 \end{matrix} \begin{matrix} \grave{u} \\ \grave{u} \\ \grave{u} \end{matrix}, g(, 0, ), =, 2$$

$2 b_2 a_3 + 2 b_3 a_1 + 2 b_3 a_2 + 3 b_3 a_3 + b_1 a_2 + 2 b_2 a_2 + b_2 a_1 + 2 b_1 a_3 + b_1 a_1$ , de mult.alg, 1, con  $B(Ker(A-, 2 b_2 a_3 + 2 b_3 a_1 + 2 b_3 a_2 + 3 b_3 a_3 + b_1 a_2 + 2 b_2 a_2 + b_2 a_1 + 2 b_1 a_3 + b_1 a_1,$

$$I))=, \begin{pmatrix} \dot{1} \\ \dot{1} \\ \dot{1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \acute{e} \\ \grave{e} \\ \grave{e} \end{matrix} \begin{matrix} \frac{b_1}{b_2} \\ 1, \frac{b_3}{b_2} \end{matrix} \begin{matrix} \grave{u} \\ \grave{u} \\ \grave{u} \end{matrix}, g(, ,$$

$2 b_2 a_3 + 2 b_3 a_1 + 2 b_3 a_2 + 3 b_3 a_3 + b_1 a_2 + 2 b_2 a_2 + b_2 a_1 + 2 b_1 a_3 + b_1 a_1$ ), =, 1

la matriz es diagonalizable pues todos los autovalores son simples

$$planort := 2 y_1 + 3 y_2 + 4 y_3 = 0$$

[ >