

## 4. Integración de funciones de una variable

### 4.3. Integrales impropias

#### 4.3.1. INTEGRALES IMPROPIAS

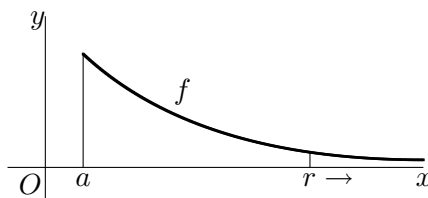
##### Definición

Se dice que  $\int_a^b f(x) dx$  es una **integral impropia** cuando el intervalo de integración es infinito ( $a$  o  $b$  son  $\pm\infty$ ) o la función  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  no está acotada.

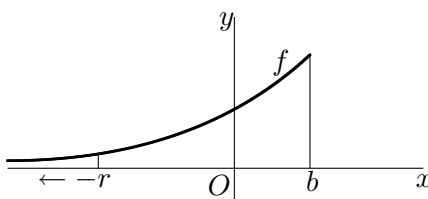
##### Integral impropia de primera especie

Es cualquier integral de la forma  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  o  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  es acotada en cada intervalo de la forma  $[-r, b]$  o  $[a, r]$ , según el caso, con  $r \in \mathbb{R}$ . En estos casos se define la integral impropia como:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_a^r f(x) dx$$



$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^b f(x) dx$$

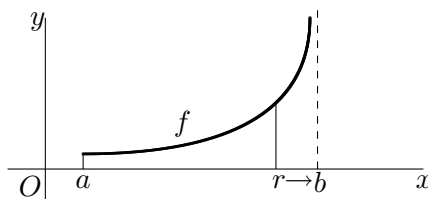


siendo convergente cuando el límite es finito, y divergente cuando es infinito. Cuando no existe el límite se dice que la integral impropia no existe.

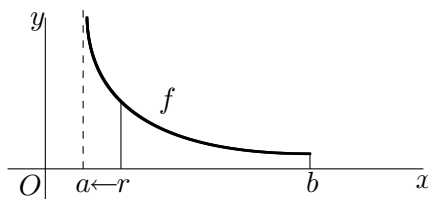
##### Integral impropia de segunda especie

Es cualquier integral de la forma  $\int_a^b f(x) dx$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  es acotada en cada intervalo de la forma  $[a, r]$  o  $[r, b]$ , según el caso, con  $a < r < b$ . En estos casos se define la integral impropia como:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow b^-} \int_a^r f(x) dx$$



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow a^+} \int_r^b f(x) dx$$



siendo convergente cuando el límite es finito, y divergente cuando es infinito. Cuando no existe el límite se dice que la integral impropia no existe.

**Observación:** Cualquier integral impropia se puede descomponer en suma de integrales impropias de primera y/o segunda especie. Se dice que la integral es convergente cuando lo son todas las integrales de primera y/o segunda especie en que se descompone, siendo divergente en caso contrario.

##### Ejercicios

1. Estudia la convergencia (hallando su valor) o divergencia de las siguientes integrales impropias:

(a)  $I_p = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$       (b)  $J_p = \int_0^1 \frac{dx}{x^p}$       (c)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$       (d)  $\int_0^1 \frac{1-2x}{\sqrt{x(1-x)}} dx$