EJERCICIOS

1. Aplicar el método de Gauss o de Gauss – Jordan para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_2 - 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_2 - x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_2 - x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 6 \end{cases}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ tales que $A\,B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales que tenga por solución el siguiente conjunto

$$T = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda - \mu \\ x_2 = 1 + \lambda + \mu + 2\nu \\ x_3 = \mu + \nu \\ x_4 = -1 - \lambda - \nu \end{array} \right\}$$

5. Eliminar parámetros en los siguientes conjuntos:

a) $\begin{cases} x_1 = 1 + a \\ x_2 = 2 + a \\ x_3 = 1 - 3a \end{cases}$,   b) $\begin{cases} x_1 = 1 - 3a + b \\ x_2 = a - 2b \\ x_3 = 2 + b \end{cases}$,   c) $\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$,

d) $\begin{cases} x_1 = a + 2b - c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b + c \\ x_5 = a - b + 2c \end{cases}$,   e) $\begin{cases} x_1 = a + 2b + 2c \\ x_2 = a + 2b + 3c \\ x_3 = a + c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a - b \end{cases}$

6. Resolver los siguientes sistemas en $\mathbb{Z}_2$: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

7. Resolver los siguientes sistemas en $\mathbb{Z}_5$: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

8. Se disponen tres botones alineados; cada botón puede estar en dos estados distintos: encendido o apagado. Al pulsar el botón 1 cambia el estado del botón 1 y del botón 2; al pulsar el botón 2 cambia el estado del botón 2 y del 3 y al pulsar

el botón 3 cambia únicamente su propio estado. El estado inicial de los tres botones es de encendido y se pretende conseguir apagar los tres botones. Plantear un sistema de ecuaciones que resuelva este juego, y encontrar la secuencia de botones que hay que pulsar para apagarlos.

9. Supongamos que en el juego del ejercicio anterior modificamos el comportamiento del tercer botón: al pulsar el botón 3 cambia el estado del botón 3 y del botón 1. Comenzando con todas las luces encendidas ¿Se puede mediante una secuencia de pulsaciones apagar todas las luces?, ¿y si inicialmente la segunda luz está apagada?