

EJERCICIOS

1. Estudiar si la operación indicada está definida y en caso afirmativo calcularla:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- $-2A$
- $B - 2A$
- AC
- CD
- $A + B$
- $3C - E$
- CB
- EB

2. Si $A \in \mathcal{M}_{3 \times 5}$ y $AB \in \mathcal{M}_{3 \times 7}$ ¿cuál es la dimensión de B ?

3. ¿Cuántas filas tiene B si $BA \in \mathcal{M}_{2 \times 6}$?

4. Sean $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$ ¿qué valor de k , si lo hay, hace que $AB = BA$?

5. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Comprobar que $AB = AC$.

6. Construir una matriz $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ cuyas columnas sean distintas de cero y distintas entre sí, tal que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Construir una matriz que contenga la información siguiente:

Distancia en kilómetros	Lugo	León	Burgos
Lugo	0	170	325
León	170	0	156
Burgos	325	156	0

Se desea trazar un mapa en cuya escala 5 mm en el papel representen 100 km de distancia real ¿cuál es la matriz de las distancias del mapa?

8. Dos fabricantes f_1 y f_2 manufacturan las siguientes cantidades de sus dos productos (tv y rr):

Fabrica\Producto	tv	rr
f_1	40	50
f_2	70	80

Estos productos son distribuidos a dos tiendas t_1 y t_2 que establece el siguiente precio por unidad de producto (en euros)

Producto\Tienda	t_1	t_2
tv	200	250
rr	100	180

Si A y B son las matrices que representan las tablas anteriores, calcular e interpretar el producto AB .

9. Suponiendo que la probabilidad de que un fumador continúe fumando un año después es del 65% mientras que la probabilidad de que un no fumador continúe sin fumar es del 85%.
- Representar los datos expuestos en una matriz de transición.
 - En 1960 el 70% de cierta población era fumadora y el 30% restante era no fumadora. Si la matriz anterior de probabilidades de transición es válida durante los 10 años siguientes ¿cuáles eran los porcentajes de fumadores y no fumadores en 1961?, ¿en 1962?, ¿en 1964?

EJERCICIOS

1. Sean $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Calcular $M_1 = E_1 A_1$, $M_2 = E_2 E_1 A_1$, $M_3 = E_3 E_2 E_1 A_1$

2. ¿Qué operación elemental por filas produce multiplicar por la izquierda por cada una de las siguientes matrices elementales?

$$E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Efectuar las siguientes operaciones elementales a la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

multiplicando por la matriz elemental correspondiente:

- Intercambiar las filas 1 y 3 de la matriz A_2
 - Sustituir la fila 1 de A_2 por la fila 1 menos 2 veces la fila 3.
 - Sustituir la fila 2 de A_2 por la fila 2 multiplicada por -2 .
 - Sustituir la fila 3 de A_2 por la fila 3 más 5 veces la fila 2.
4. Estudiar si cada una de las siguientes matrices está en forma escalonada. Calcular su forma canónica por filas:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_9 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Encontrar dos matrices elementales E_8 y E_9 que hagan que la igualdad $A_{10} = E_9 E_8 B_1$ sea

cierta, siendo $A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

6. Repetir el ejercicio 5 con las matrices siguientes:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Realizar, para cada una de las matrices del ejercicio 4, operaciones elementales por columnas hasta obtener una forma canónica por columnas de la matriz. Comparar el número de columnas no nulas que se obtienen en este proceso, con el número de filas no nulas obtenidas en el ejercicio 4.

8. Considerando las matrices del ejercicio 1, calcular $N_1 = A_1 E_1$, $N_2 = A_1 E_1 E_2$, $N_3 = A_1 E_1 E_2 E_3$ ¿Qué operación elemental por columnas produce multiplicar por la derecha por cada una de las matrices elementales dadas en el ejercicio 2?

EJERCICIOS

1. Calcular el rango de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 2 \\ 1 & -8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Hallar las inversas de las siguientes matrices elementales. ¿Son sus inversas también matrices elementales?, en caso afirmativo describir la operación elemental que realizan.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinar el rango de las matrices siguientes. Estudiar si son regulares y en caso afirmativo calcular su inversa y en caso negativo calcular una matriz de paso a su forma canónica por filas.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

4. La criptografía es la ciencia que estudia el proceso de escribir en clave secreta un mensaje o de descubrir su contenido.

El siguiente proceso describe cómo usar matrices en criptografía:

1. Se numeran los símbolos alfabéticos a usar con un orden preestablecido. Por ejemplo:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	“ ”
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

2. Se fija una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ que tenga inversa. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
3. Se traduce el mensaje que se desea transmitir a un mensaje numérico, en forma de vector columna. Por ejemplo usando la tabla del apartado a), si el mensaje que se

desea transmitir es abcd el vector que se obtiene es: $\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

4. Las componentes del vector columna obtenido en c) se redistribuyen en una matriz de n filas (como la matriz A). Si es necesario se completa con componentes de valor 30.

Sea $N \in \mathcal{M}_{n \times r}$ la matriz obtenida. En el ejemplo anterior sería $N = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 30 \\ 3 & 30 \end{pmatrix}$

5. Se realiza el producto matricial $C = A N$. En el ejemplo

$$C = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 30 \\ 3 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & -222 \\ 5 & 60 \\ 22 & 226 \end{pmatrix}$$

6. Se transmiten las componentes de la matriz C leídas por columnas:

$$\begin{pmatrix} -21 \\ 5 \\ 22 \\ -222 \\ 60 \\ 226 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- i) Calcula la inversa de la matriz A .

- ii) ¿Cuál ha sido el mensaje enviado si se ha recibido

$$\begin{pmatrix} -67 \\ 19 \\ 68 \\ -97 \\ 21 \\ 102 \\ -213 \\ 60 \\ 214 \end{pmatrix} ?$$

EJERCICIOS

1. Aplicar el método de Gauss o de Gauss – Jordan para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_2 - 3x_3 = -5 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} x_2 - x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 1 \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} x_2 - x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 6 \end{cases} \end{array}$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones matriciales:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices $B \in \mathcal{M}_{2 \times 2}$ tales que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Encontrar un sistema de ecuaciones lineales que tenga por solución el siguiente conjunto

$$T = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda - \mu \\ x_2 = 1 + \lambda + \mu + 2\nu \\ x_3 = \mu + \nu \\ x_4 = -1 - \lambda - \nu \end{cases} \right\}$$

5. Eliminar parámetros en los siguientes conjuntos:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 = 1 + a \\ x_2 = 2 + a \\ x_3 = 1 - 3a \end{cases}, \quad \text{b)} \begin{cases} x_1 = 1 - 3a + b \\ x_2 = a - 2b \\ x_3 = 2 + b \end{cases}, \quad \text{c)} \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x_1 = a + 2b - c \\ x_2 = a - b \\ x_3 = 3b \\ x_4 = b + c \\ x_5 = a - b + 2c \end{cases}, \quad \text{e)} \begin{cases} x_1 = a + 2b + 2c \\ x_2 = a + 2b + 3c \\ x_3 = a + c \\ x_4 = 0 \\ x_5 = a - b \end{cases}$$

6. Resolver los siguientes sistemas en \mathbb{Z}_2 : $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}, \begin{cases} x_1 + x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

7. Resolver los siguientes sistemas en \mathbb{Z}_5 : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$

8. Se disponen tres botones alineados; cada botón puede estar en dos estados distintos: encendido o apagado. Al pulsar el botón 1 cambia el estado del



botón 1 y del botón 2; al pulsar el botón 2 cambia el estado del botón 2 y del 3 y al pulsar

el botón 3 cambia únicamente su propio estado. El estado inicial de los tres botones es de encendido y se pretende conseguir apagar los tres botones. Plantear un sistema de ecuaciones que resuelva este juego, y encontrar la secuencia de botones que hay que pulsar para apagarlos.

9. Supongamos que en el juego del ejercicio anterior modificamos el comportamiento del tercer botón: al pulsar el botón 3 cambia el estado del botón 3 y del botón 1. Comenzando con todas las luces encendidas ¿Se puede mediante una secuencia de pulsaciones apagar todas las luces?, ¿y si inicialmente la segunda luz está apagada?