

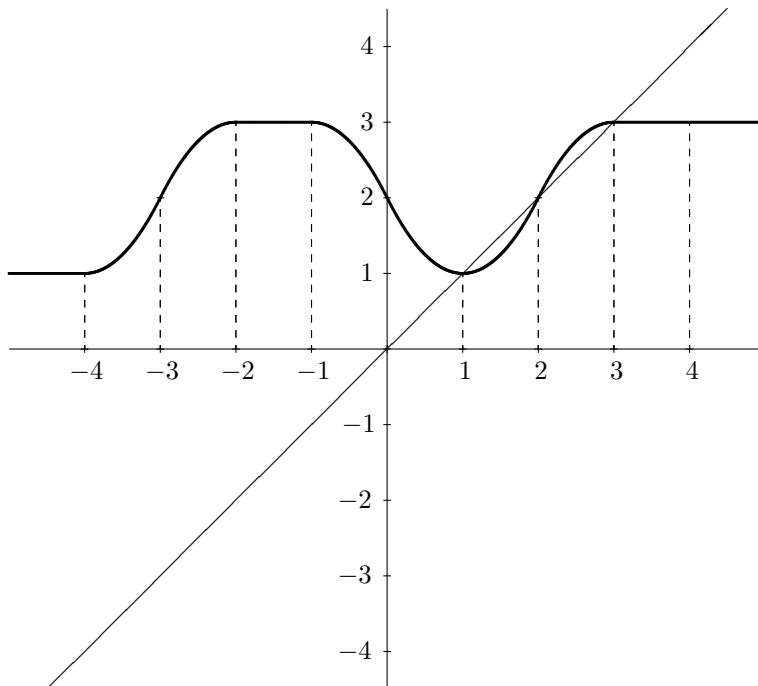
APPELLIDOS:
NOMBRE:

OPTATIVA
LIBRE ELECCIÓN

1. Señalar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones. (Cada pregunta con los tres apartados acertados puntuará 0.5, dos aciertos y la otra en blanco 0.3, un acierto y dos en blanco o dos aciertos y un error 0.2 y más de un error no puntúa)

- i) Sean $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continua y sea x_0 un punto fijo de f . V F
- a) Si $x_0 > f(x) > x$ si $x < x_0$ $x_0 < f(x) < x$ si $x > x_0$, entonces x_0 es punto fijo atractivo de f .
- b) Si x_0 es punto fijo atractivo de f y f es derivable en x_0 , entonces $|f'(x_0)| < 1$.
- c) Si $f(x) = x$, entonces 0 es punto fijo atractivo de f .
- ii) Sea $f_c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_c(x) = cx(1-x)$, $c \in \mathbb{R}$.
- a) Existe un único valor de c para el que 0 es un punto fijo.
- b) Si $c = 4$, la órbita de 0.75 es densa.
- c) Si $c > 4$, la órbita de 1 diverge a $-\infty$.
- iii) Sea $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función "tienda".
- a) T tiene dos puntos fijos, ambos repulsivos.
- b) T tiene dos 2-ciclos, ambos repulsivos.
- c) T tiene ciclos de todos los periodos, y todos son repulsivos.
- iv) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineal.
- a) Hay un único punto fijo de f , el origen, y no hay 2-ciclos.
- b) Si el origen no es atractivo ni repulsivo, ha de ser un punto de silla.
- c) Si el origen es un punto de silla todas las órbitas terminan alejándose del origen.

2. Determinar los puntos fijos, el carácter (atractivo o repulsivo) y las cuencas de atracción (si la hubiera) del sistema dinámico en \mathbb{R} definidos por la función de gráfica



Determina también el destino de los puntos no incluidos en las cuencas de atracción anteriores.

3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

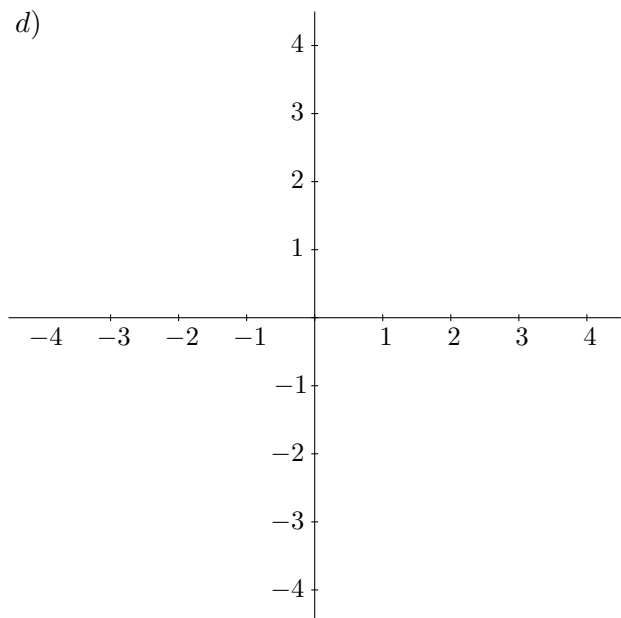
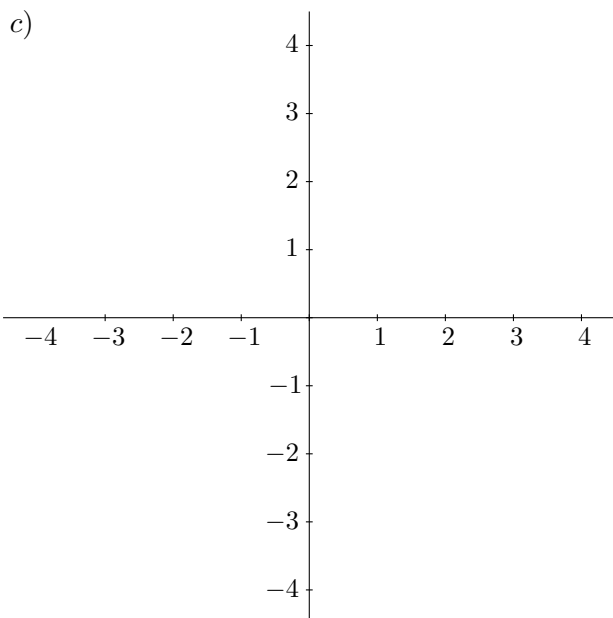
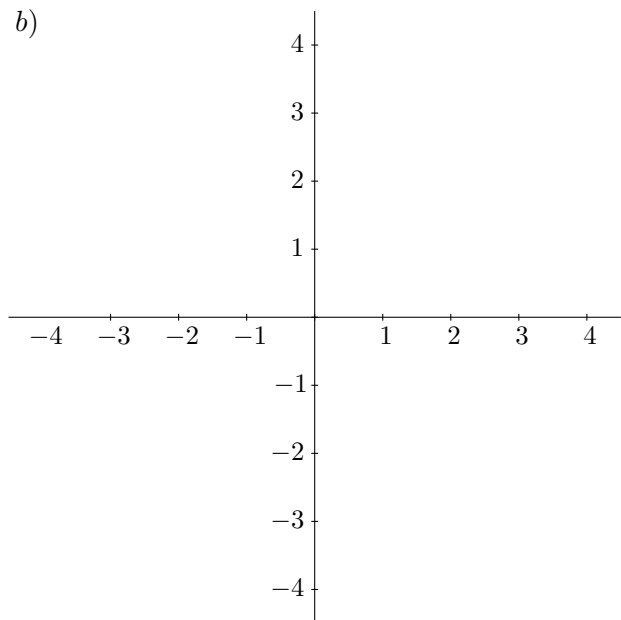
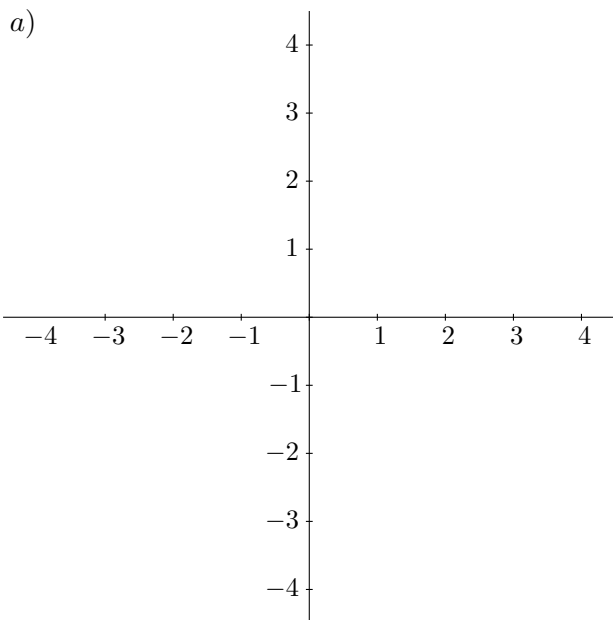
¿Cuáles de propiedades que definen un sistema caótico cumple f ?

Sensibilidad a las condiciones iniciales Transitividad topológica Densidad de los puntos periódicos

¿Es f caótica? Si No

4. Describe con detalle un programa, o escribe su pseudocódigo, para dibujar el diagrama de feigenbaum. ¿Por qué se utiliza siempre el punto $\frac{1}{2}$ como punto inicial?

5. Marca los puntos fijos y representa algunas órbitas representativas de $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $L(x) = Ax$ en los siguientes casos: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.



¿Existe algún punto fijo atractivo o repulsivo en alguno de los casos?