Examen Final
Junio de 2005

Introducción a los Sistemas Dinámicos

Tiempo 1h30m
2+2+2+2+2

APELLIDOS:	OPTATIVA	☐
NOMBRE:	LIBRE ELECCIÓN	☐

1. Señalar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones. (Cada pregunta con los tres apartados acertados puntuará 0.5, dos aciertos y la otra en blanco 0.3, un acierto y dos en blanco o dos aciertos y un error 0.2 y más de un error no puntúa)

   i) Sean $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ derivable y sea $x_0 \in (0,1)$. V F

   a) Si $f(0) = 1$ y $f(1) = 0$, existe un punto fijo de f. ☐ ☐

   b) Si x_0 es punto 2-periódico atractivo de f, entonces $|f'(x_0)| \leq 1$. ☐ ☐

   c) Si x_0 es punto 2-periódico atractivo de f, entonces $|f''(x_0)| \leq 1$. ☐ ☐

   ii) Sea $f_c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_c(x) = cx(1-x)$, $c \in \mathbb{R}$.

   a) Existe un único valor de c para el que 0.5 es un punto fijo. ☐ ☐

   b) Si $c = 4$, la órbita de 0.5 es densa. ☐ ☐

   c) Si $c > 4$, la órbita de 0.5 diverge a $-\infty$. ☐ ☐

   iii) Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

   a) Si f es sensible a las condiciones iniciales, f es caótica. ☐ ☐

   b) Si f es topológicamente transitiva, f es caótica. ☐ ☐

   c) Si f es topológicamente transitiva, los puntos periódicos de f son densos. ☐ ☐

   iv) Sea f la aplicación que tiene por atractor la herradura de Smale.

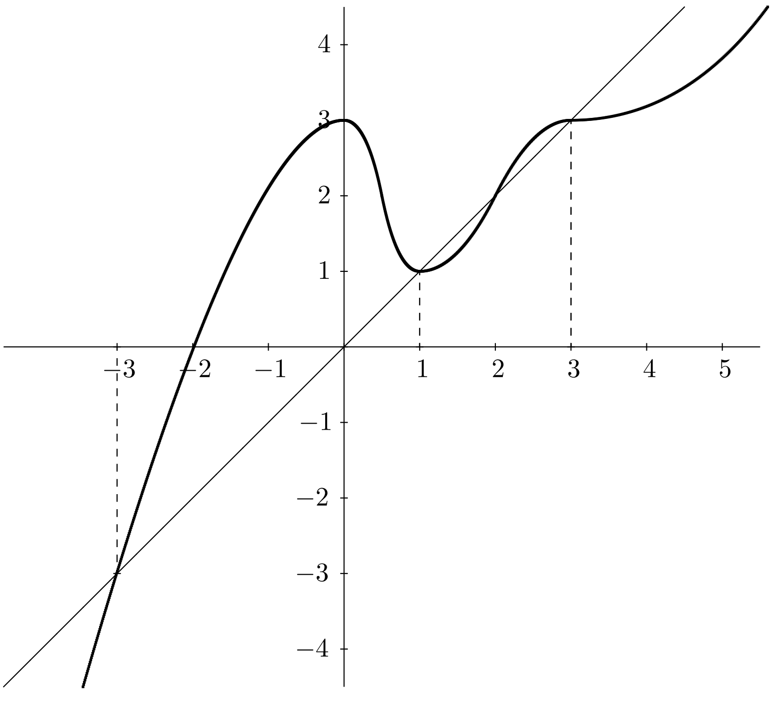
   a) Las órbitas de los cuatro vértices del cuadrado convergen al mismo punto. ☐ ☐

   b) Las órbitas de todos los puntos del borde del cuadrado convergen al mismo punto. ☐ ☐

   c) La herradura de Smale tiene área 0. ☐ ☐

Constesta 4 de las 5 preguntas siguientes.

2. Determinar los puntos fijos, el carácter (atractivo o repulsivo) y las cuencas de atracción (si la hubiera) del sistema dinámico en $\mathbb{R}$ definidos por la función de gráfica



   Determina también el conjunto de puntos cuya órbita diverge a ∞ y a $-\infty$.

3. Demuestra, a partir de su expresión en base 2 que la función tienda es caótica.

4. Considera la familia logística $f_c(x) = cx(1-x)$.

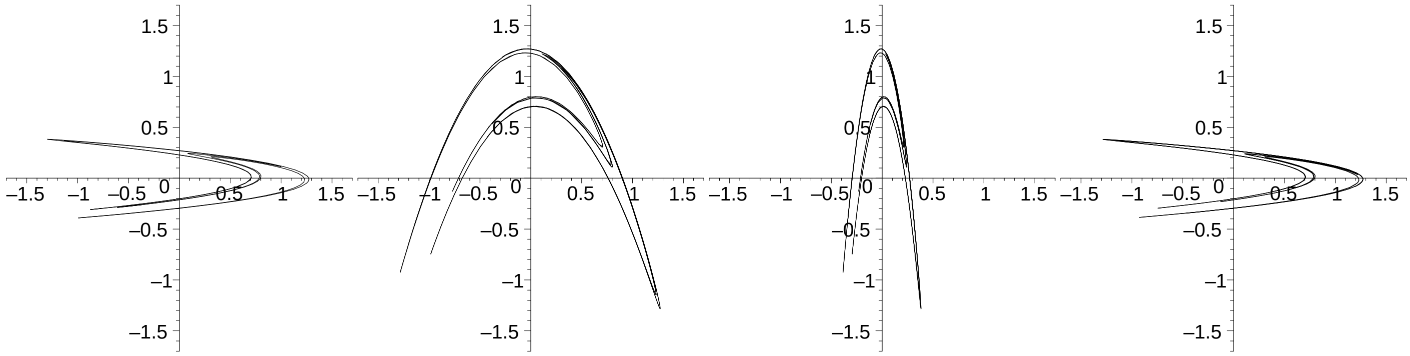
   i) Calcula los puntos fijos de f_c.

   ii) Demuestra que uno de ellos es repulsivo si $c > 0$ y que el otro es atractivo si $0 < c < 3$ y repulsivo si $c > 3$.

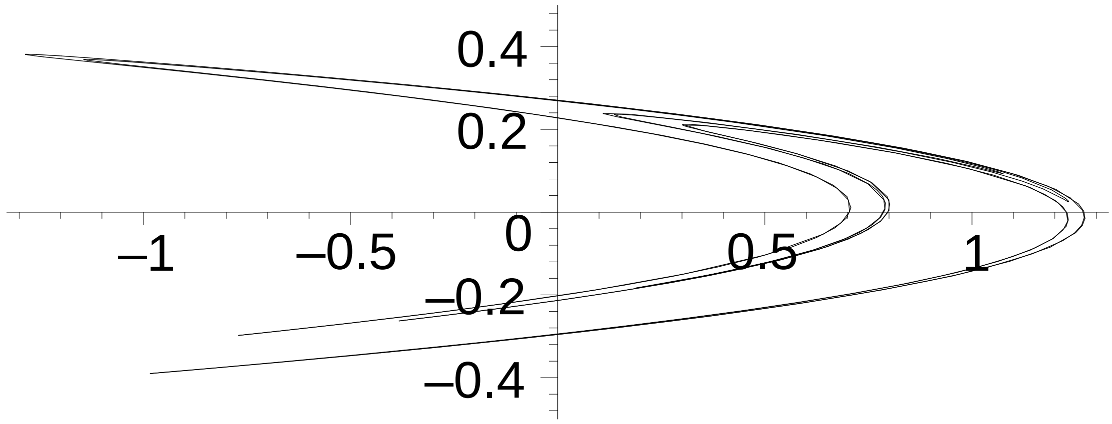
   iii) Para todo c, los puntos $q_c = \dfrac{c+1-\sqrt{(c+1)(c-3)}}{2c}$ y $\bar{q}_c = \dfrac{c+1+\sqrt{(c+1)(c-3)}}{2c}$ forman un 2-ciclo. Comprobar, usando la regla de la cadena, que $(f_c^2)'(q_c) = (f_c^2)'(\bar{q}_c) = 1-(c+1)(c-3)$.

   iv) Usar el resultado anterior para calcular los valores de c para los que q_c y $\bar{q}_c$ forman un 2-ciclo atractivo.

5. Sabiendo que la aplicación de Hénon se descompone como composisición de 3 aplicaciones que actúan sobre el atractor de Hénon de la siguiente manera



pinta los 5 primeros términos de la órbita del punto del atractor de Hénon de abscisa máxima (esto es, $a, f(a), f^2(a), f^3(a), f^4(a)$) y los 2 primeros términos de su órbita negativa (esto es, $f^{-1}(a), f^{-2}(a)$)



6. Señala a qué partes del conjunto de Mandelbrot corresponden los siguientes conjuntos de Julia