Examen Final
Junio de 2002

Introducción a los Sistemas Dinámicos

Tiempo 1:30h.

APELLIDOS:	OPTATIVA ☐
NOMBRE:	LIBRE ELECCIÓN ☐

1. Señalar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones. (Cada pregunta con los tres apartados acertados puntuará 0.5, dos aciertos y la otra en blanco 0.3, un acierto y dos en blanco o dos aciertos y un error 0.2 y más de un error no puntúa)

   i) Sean $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ derivable y sea $x_0 \in [0,1]$. V F

   a) x_0 es punto fijo de f si y solo si $|f'(x_0)| < 1$. ☐ ☐

   b) x_0 es punto fijo atractivo de f si y solo si $|f'(x_0)| < 1$. ☐ ☐

   c) Si $f(x) = x^2$, 0 es punto fijo atractivo de f. ☐ ☐

   ii) Sea $f_c : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

   a) Existe un único valor de c para el que el 0 es un punto fijo. ☐ ☐

   b) Si $c > 1/4$ no existen puntos fijos y todas las órbitas divergen. ☐ ☐

   c) Si $c < -2$ existe un conjunto de Cantor atractivo. ☐ ☐

   iii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = (x+y, x+2y)$.

   a) f conserva áreas. ☐ ☐

   b) El cuadrado unidad es invariante por f. ☐ ☐

   c) $(0,0)$ es un punto fijo atractivo de f. ☐ ☐

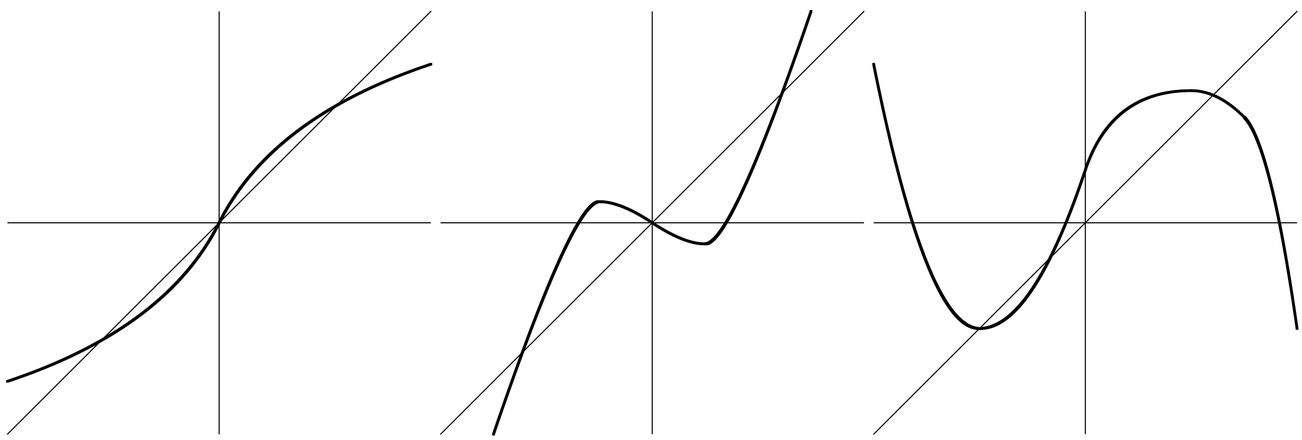
   iv) Sea $f_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

   a) El conjunto de Julia $J(f_c)$ es el conjunto de puntos fijos de f_c. ☐ ☐

   b) El conjunto de Julia $J(f_c)$ es la frontera de la cuenca de atracción de los puntos fijos de f_c. ☐ ☐

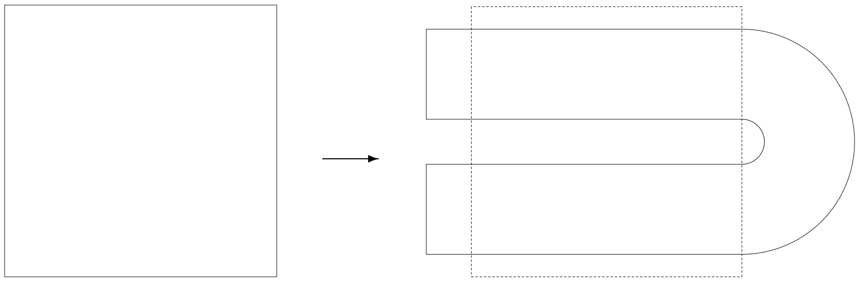
   c) El conjunto de Mandelbrot es la unión de todos los conjuntos de Julia. ☐ ☐

2. Determinar los puntos fijos, el carácter (atractivo o repulsivo) y las cuencas de atracción (si la hubiera) de los sistemas dinámicos en $\mathbb{R}$ definidos por las funciones de gráficas



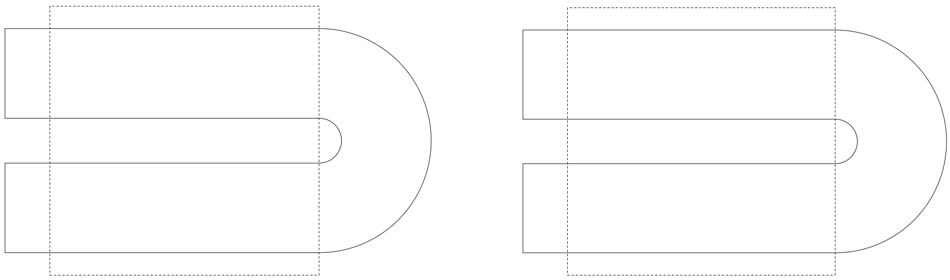
3. Define las 3 propiedades que caracterizan un sistema dinámico caótico. ¿Cuál de las 3 es más fuerte? ¿Cuál menos?

4. Sea $0 < \lambda < \dfrac{1}{2}$ y sea f_λ cuya acción corresponde a la composición de dos acciones sucesivas, una de estirado (λ-contracción vertical más $\dfrac{1}{\lambda}$-expansión horizontal) y otra de curvado, colocando el resultado como se ve en la figura

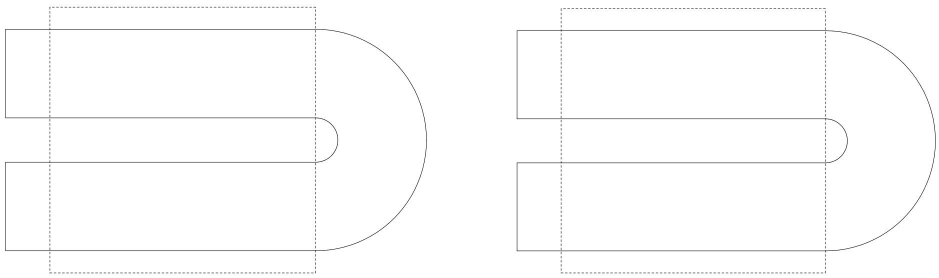


Dibujar en la figura anterior la imagen del cuadrado tras 2 iteraciones:

Pintar en las figuras siguientes los conjuntos de puntos del cuadrado cuya imagen está en el cuadrado y los que son imagen de algún punto del cuadrado:

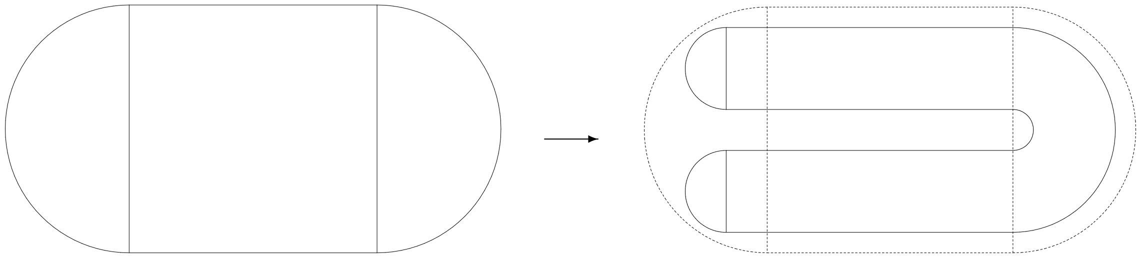


Pintar los conjuntos de puntos del cuadrado cuya imagen tras 2 iteraciones está en el cuadrado y los que son imagen tras 2 iteraciones de algún punto del cuadrado, indicando qué partes del primer conjunto se aplican en qué partes del segundo conjunto:



¿Cómo es el conjunto de puntos del cuadrado cuya órbita está contenida en el cuadrado?

Si extendemos f_λ a



¿cual es el destino de los puntos cuya órbita no se mantiene en el cuadrado central?