

SISTEMAS DINÁMICOS

SISTEMAS DINÁMICOS PLANOS

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

Sea  $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal con matriz asociada  $A$ .

Sea  $J$  la matriz reducida de Jordan de  $A$  (que cumple que  $J=QAQ^{-1}$  con  $Q$  matriz no singular).

Entonces  $L(x)=Ax$  y  $L'(x)=Jx$  son aplicaciones lineales linealmente conjugadas.

Por tanto, para estudiar los posibles comportamientos dinámicos de las aplicaciones lineales basta considerar aquellas definidas por matrices reducidas de Jordan.

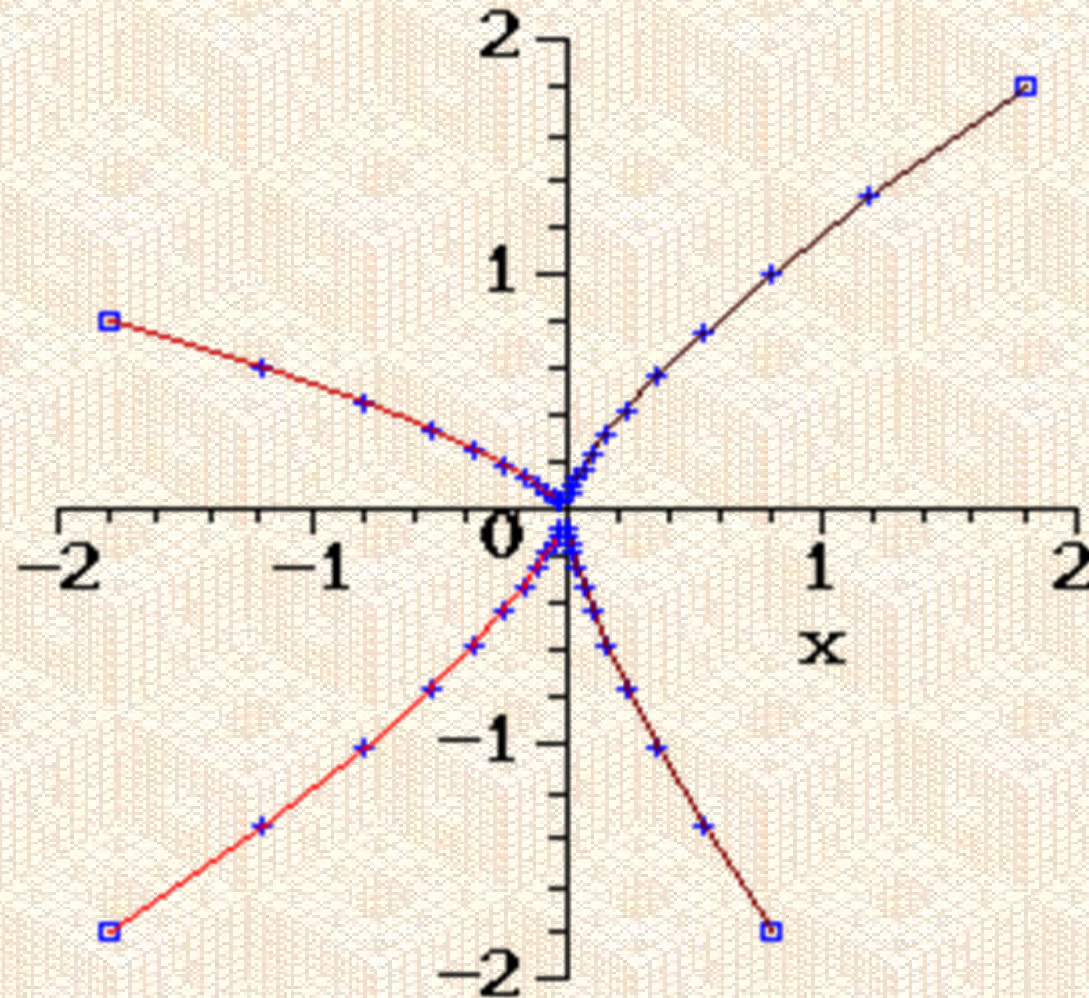
Para ello vamos a considerar las diferentes posibilidades para  $J$ , considerando primero el caso en que todos los autovalores tienen módulo distinto de 1.

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$0 < \lambda_1 < 1$$

$$0 < \lambda_2 < 1$$



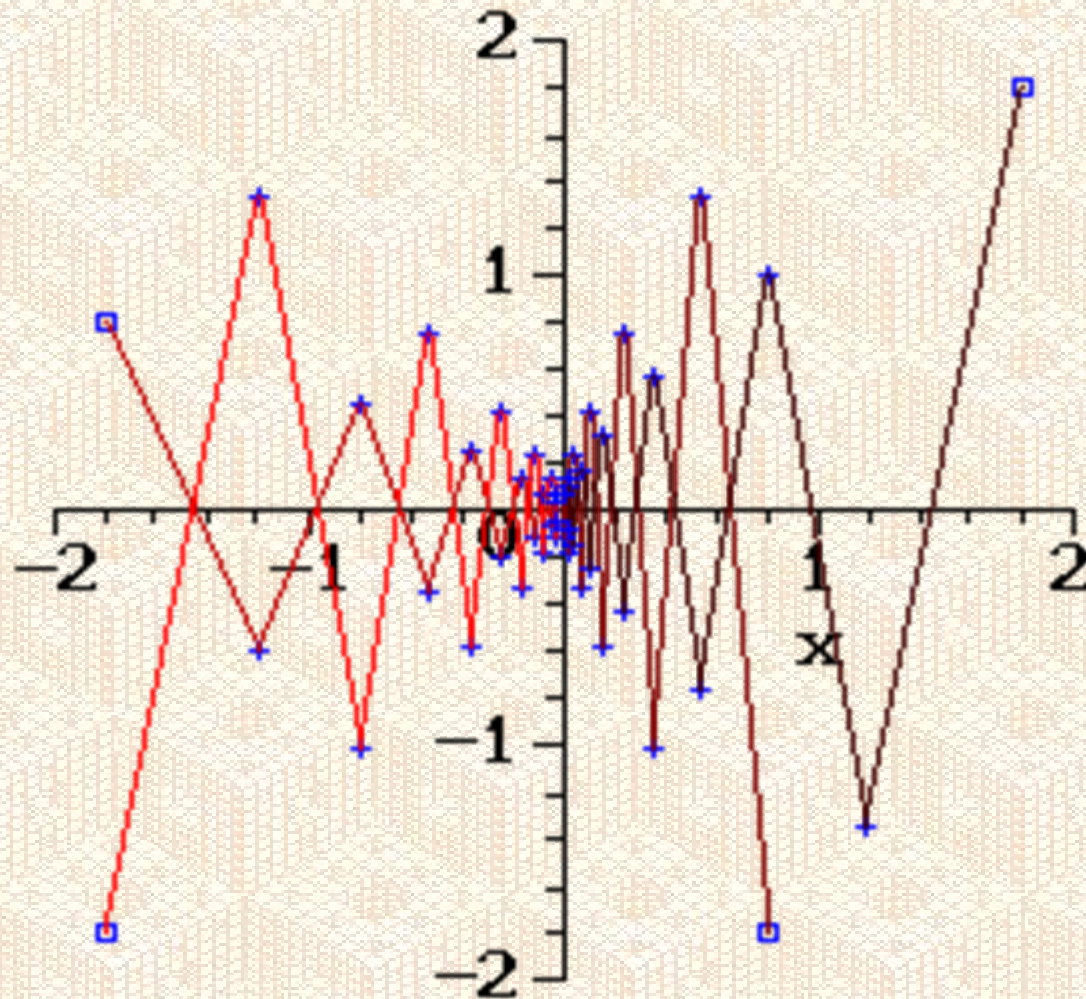
El origen atrae  
todas las órbitas

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$0 < \lambda_1 < 1$$

$$-1 < \lambda_2 < 0$$



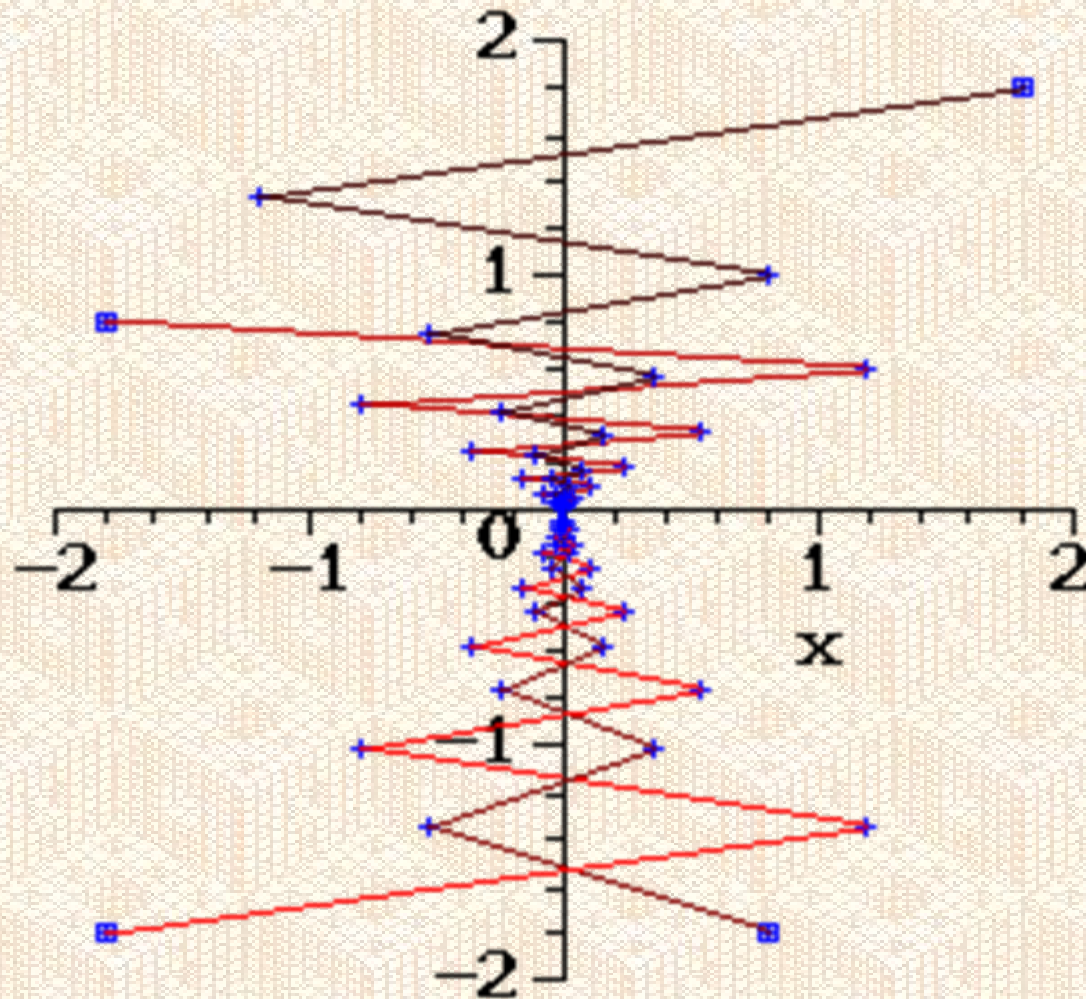
El origen atrae  
todas las órbitas

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$-1 < \lambda_1 < 0$$

$$0 < \lambda_2 < 1$$



El origen atrae  
todas las órbitas

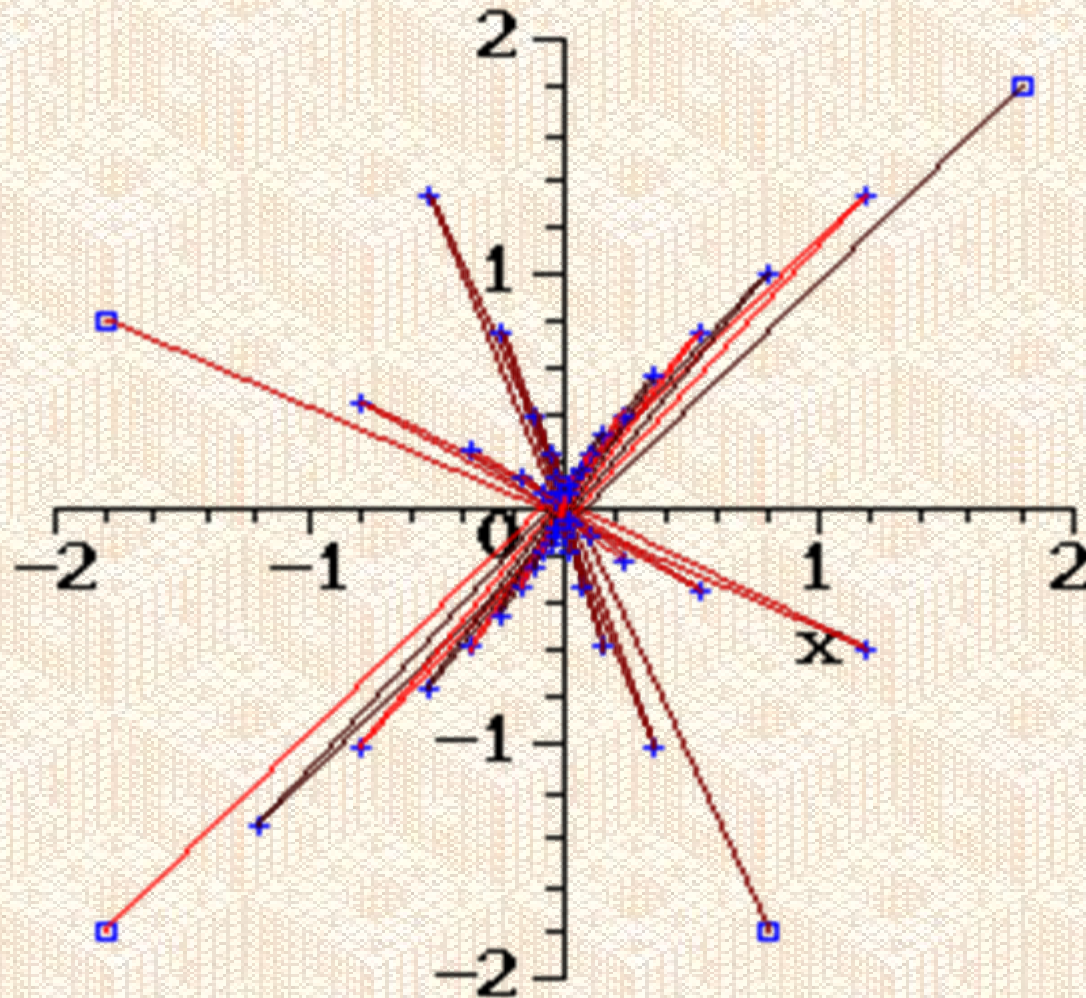
# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$-1 < \lambda_1 < 0$$

$$-1 < \lambda_2 < 0$$

El origen atrae  
todas las órbitas

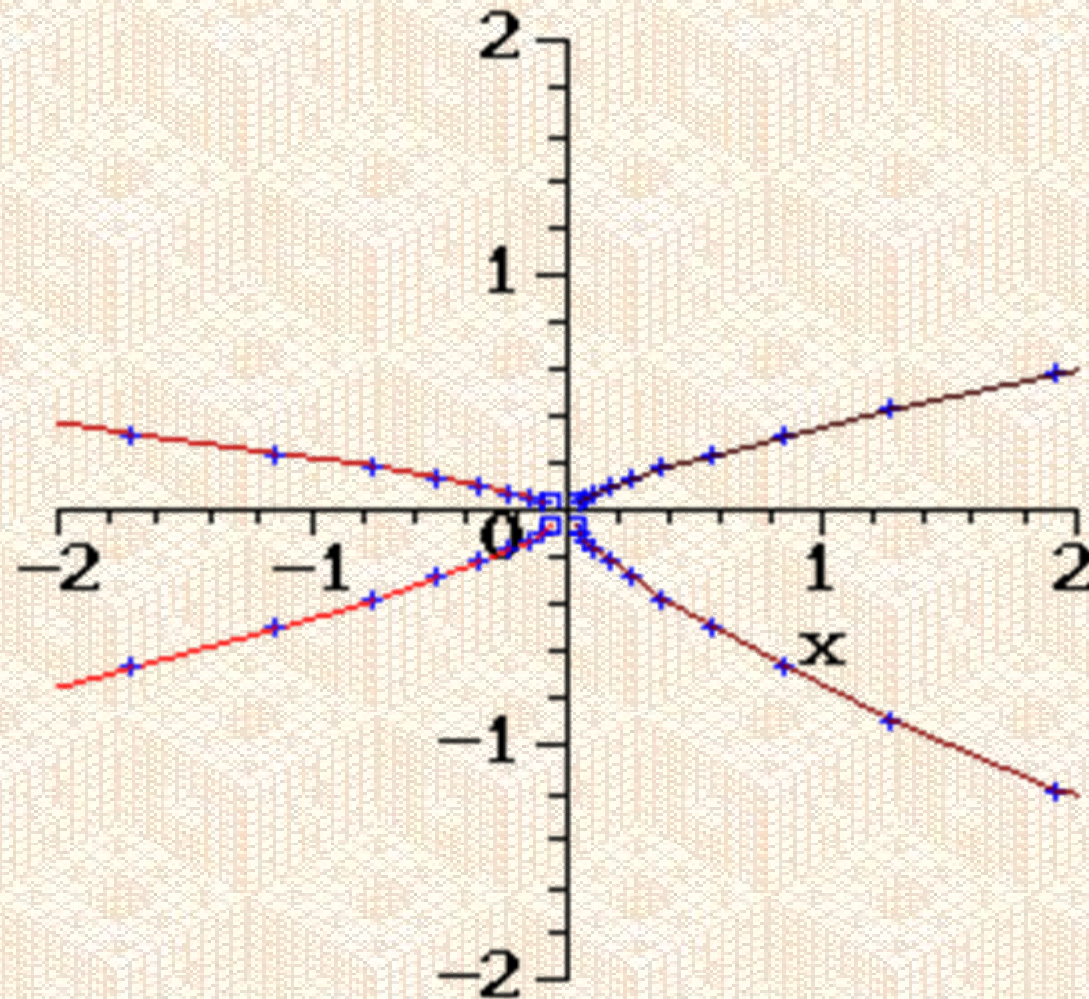


# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 > 1$$

$$\lambda_2 > 1$$



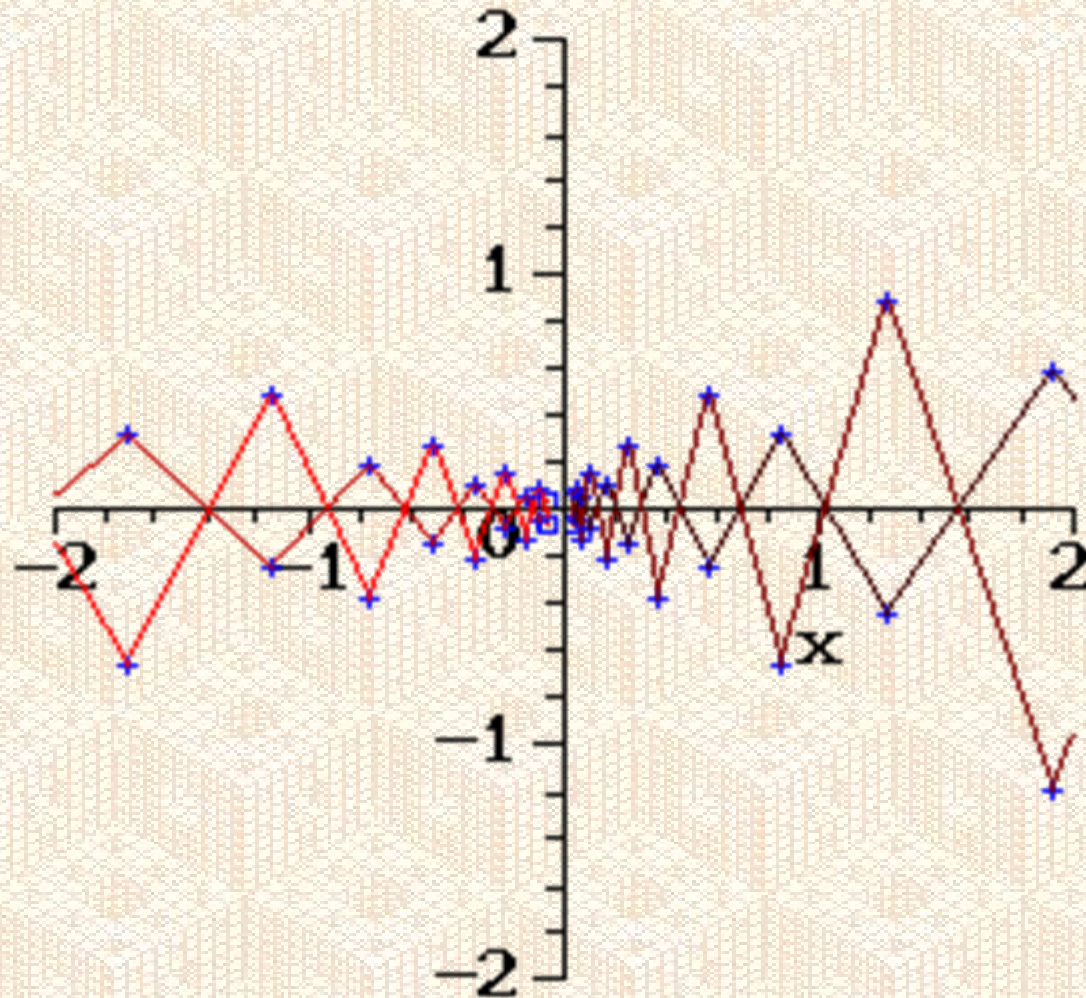
El origen repele  
todas las órbitas

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 > 1$$

$$\lambda_2 < -1$$



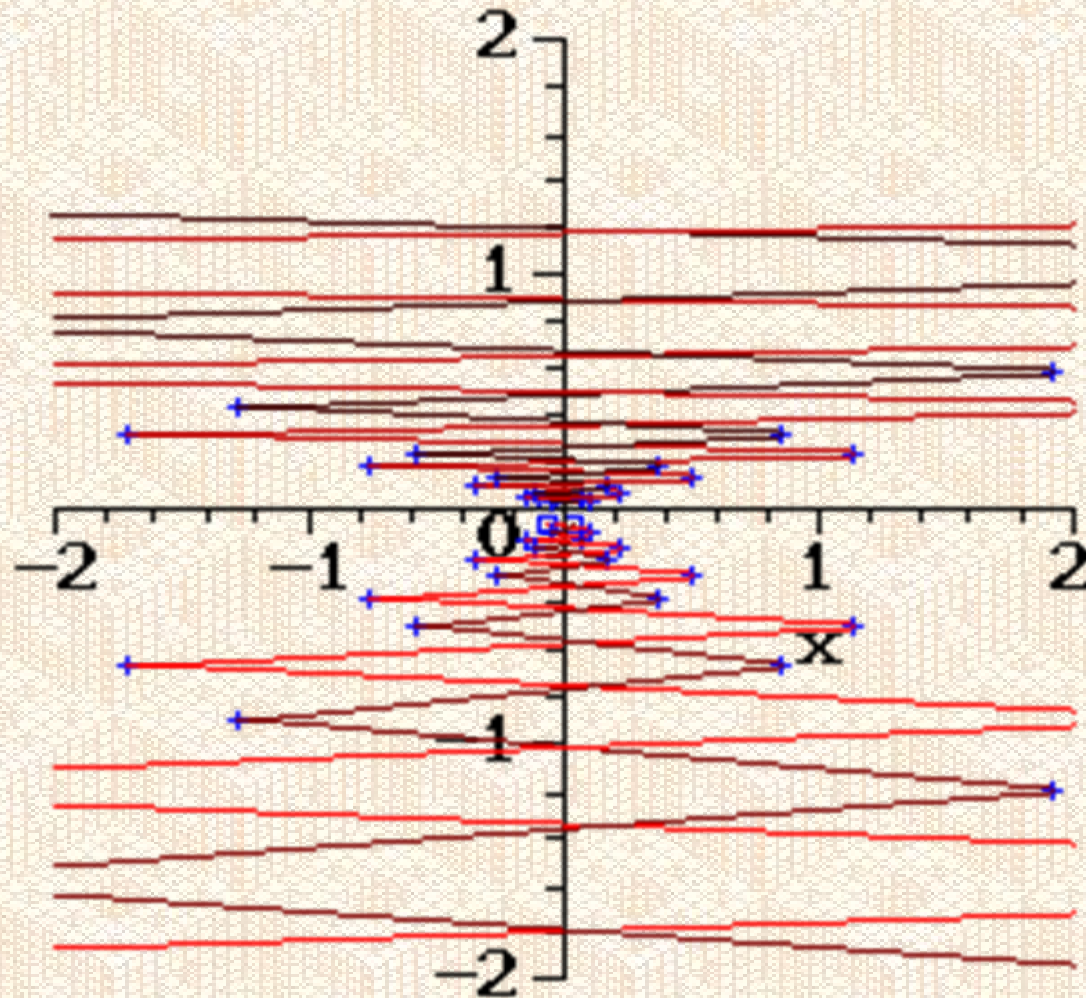
El origen repele  
todas las órbitas

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 < -1$$

$$\lambda_2 > 1$$



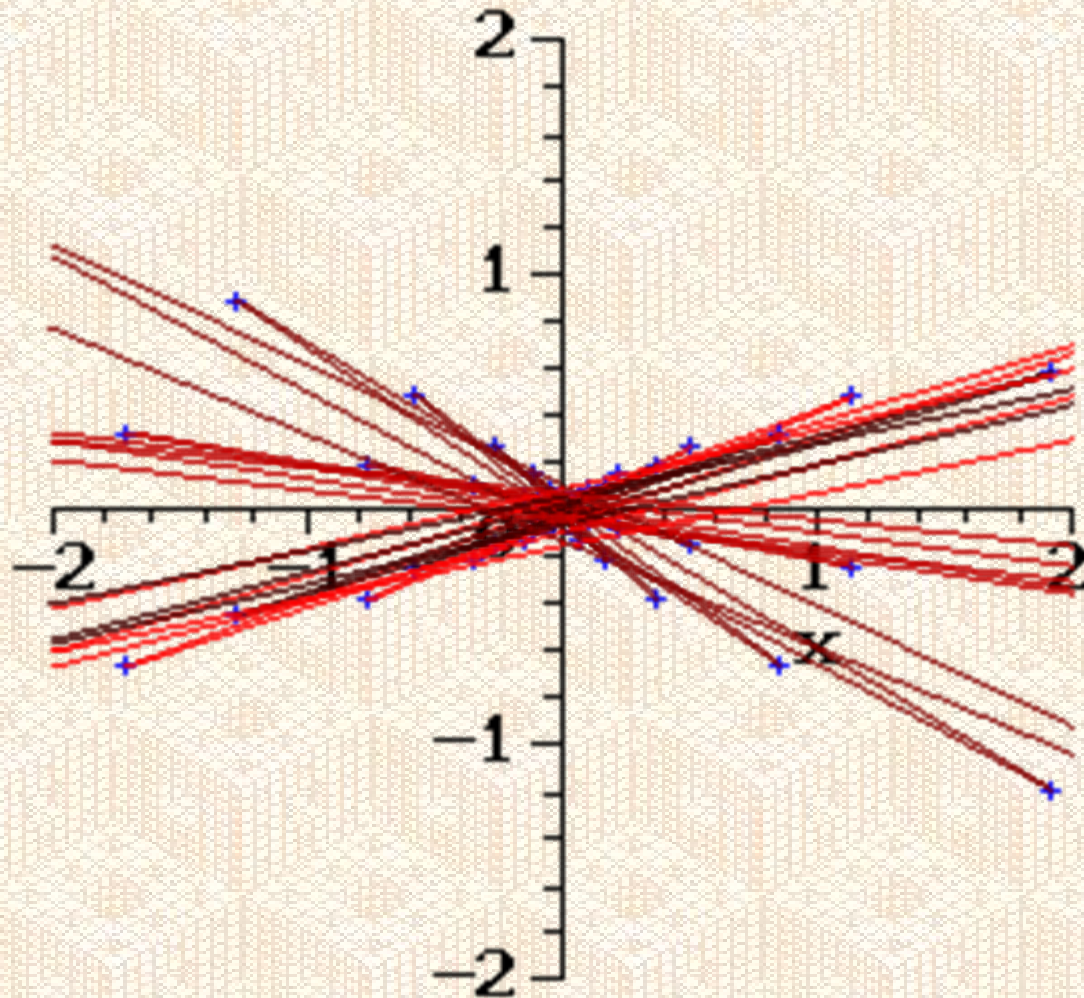
El origen repele  
todas las órbitas

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 < -1$$

$$\lambda_2 < -1$$



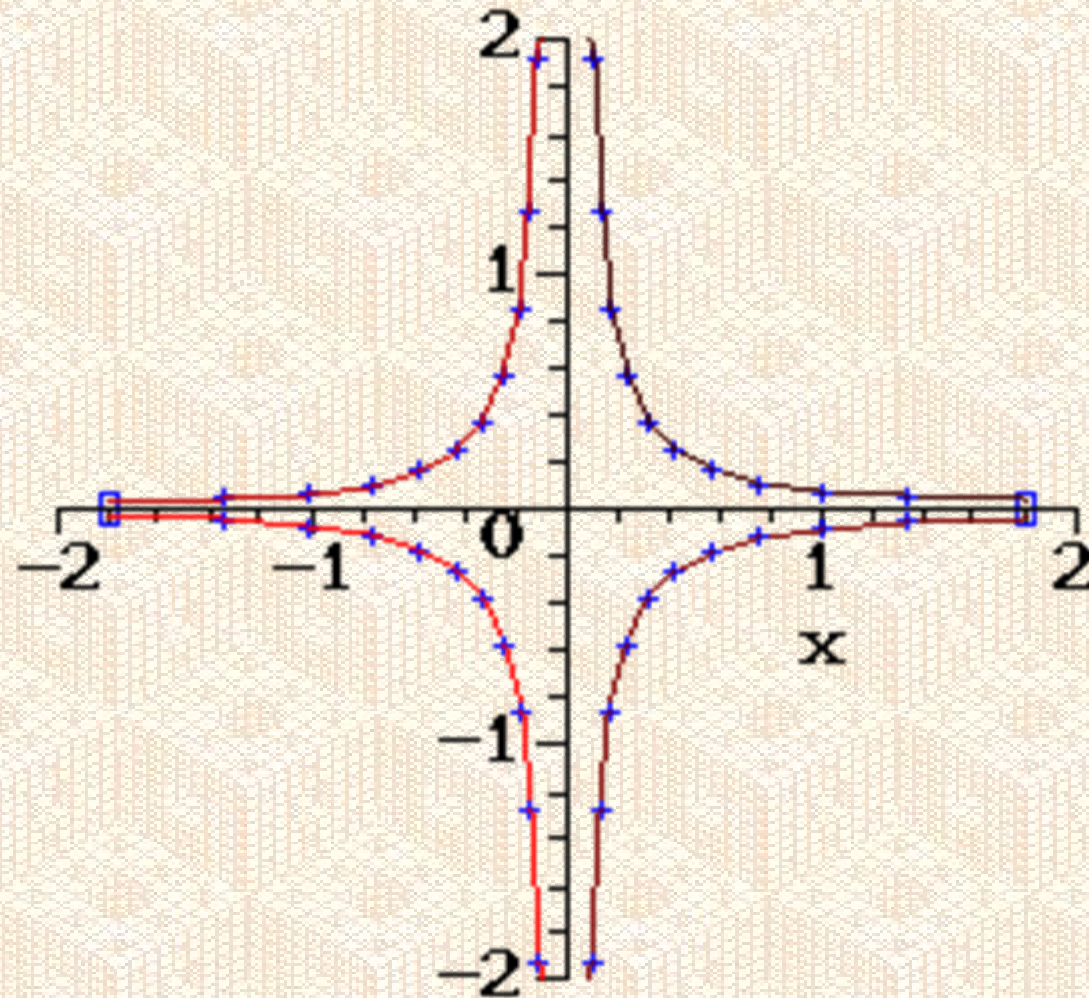
El origen repele  
todas las órbitas

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$0 < \lambda_1 < 1$$

$$\lambda_2 > 1$$



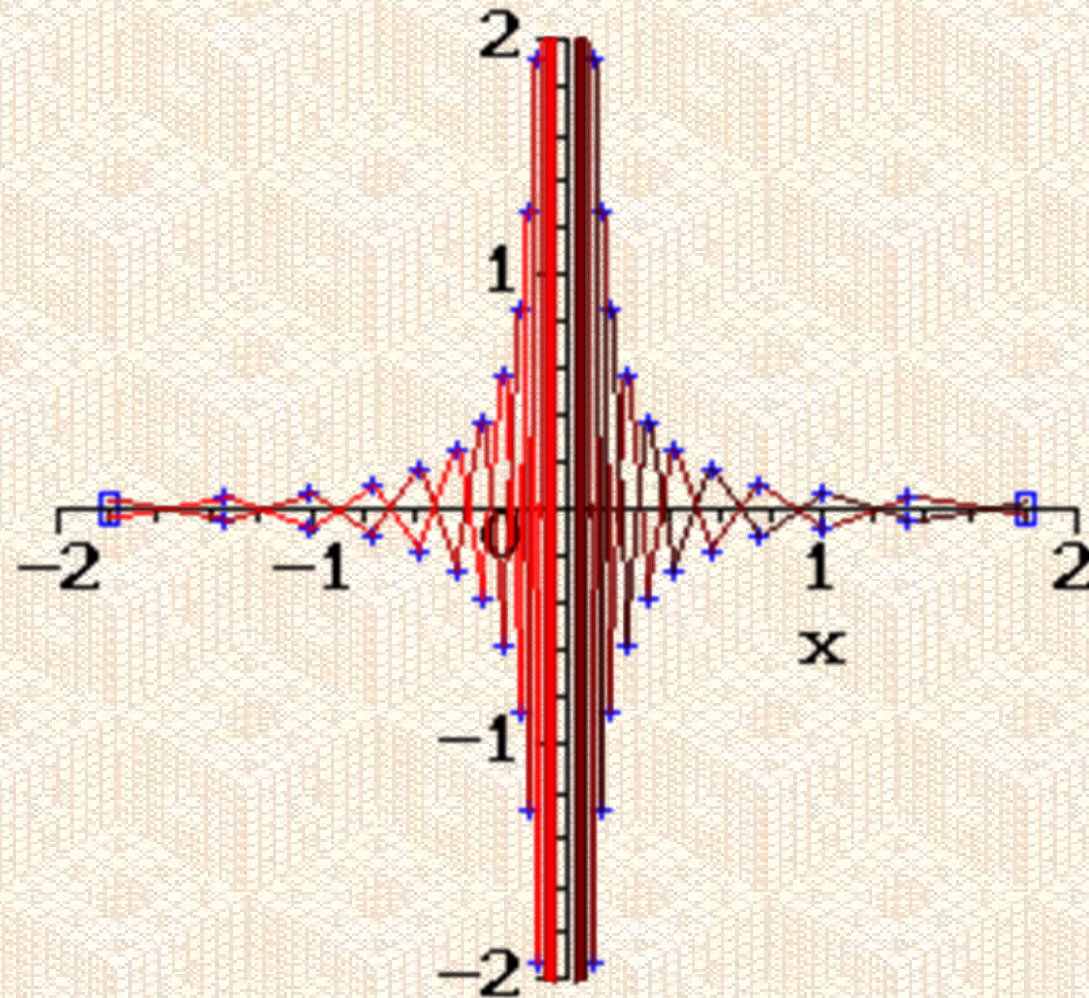
El origen es un punto de silla

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$0 < \lambda_1 < 1$$

$$\lambda_2 < -1$$



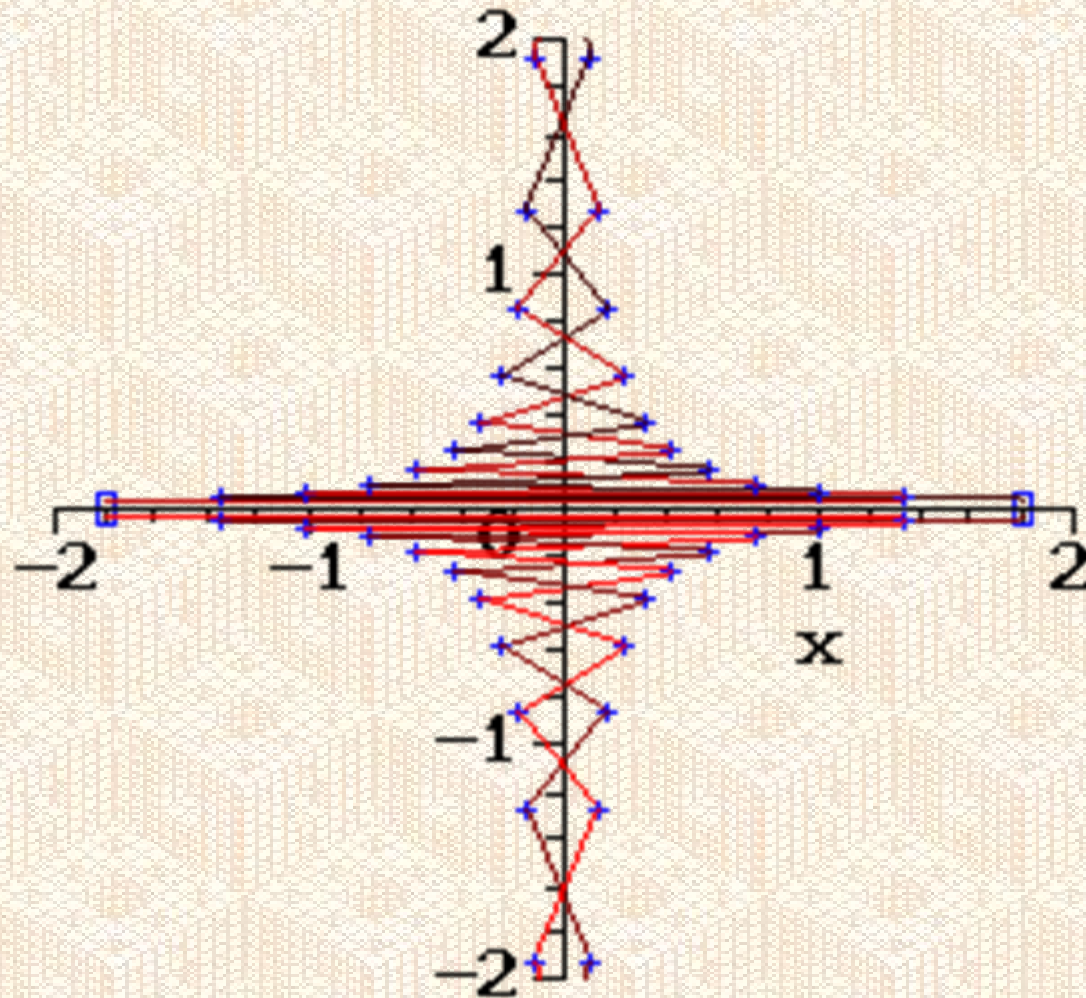
El origen es un punto de silla

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$-1 < \lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 > 1$$



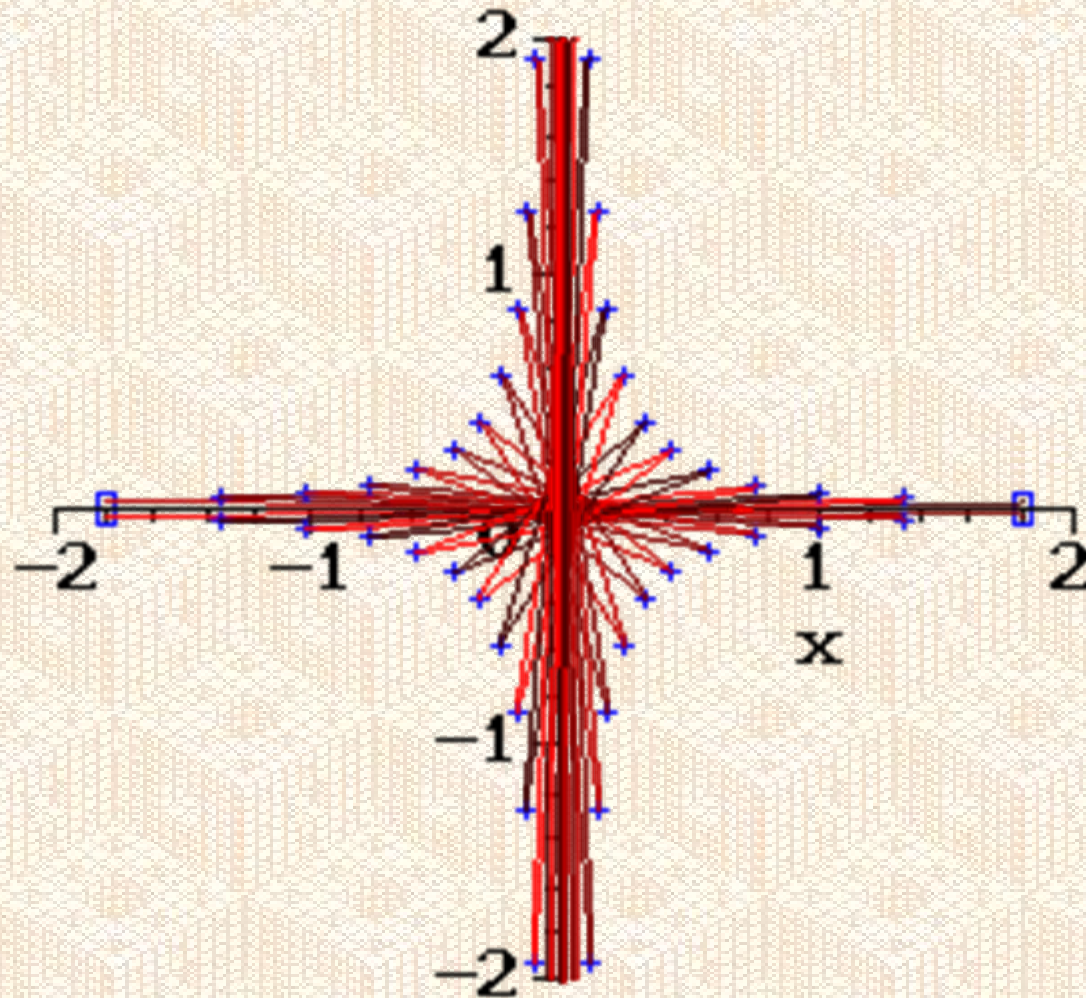
El origen es un punto de silla

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$-1 < \lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 < -1$$

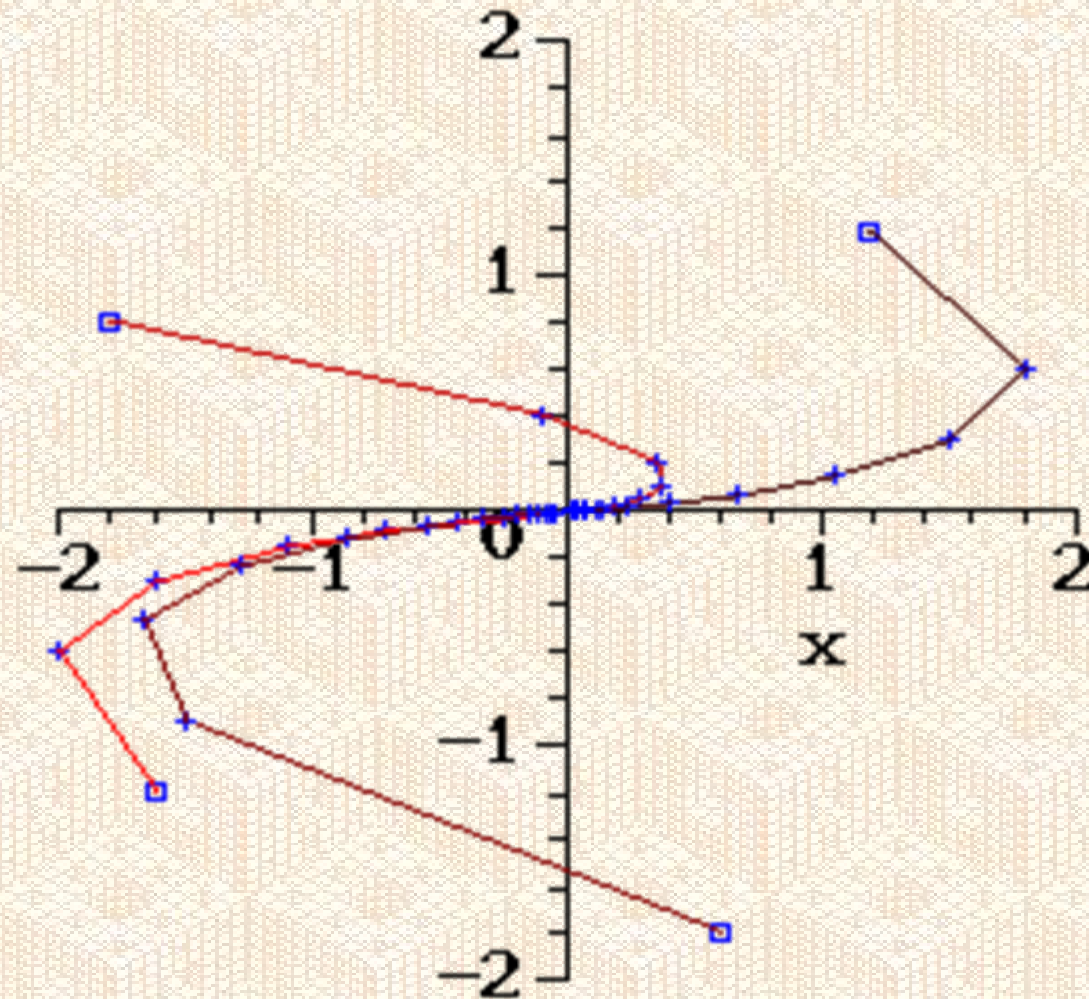


El origen es un punto de silla

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$0 < \lambda < 1$$

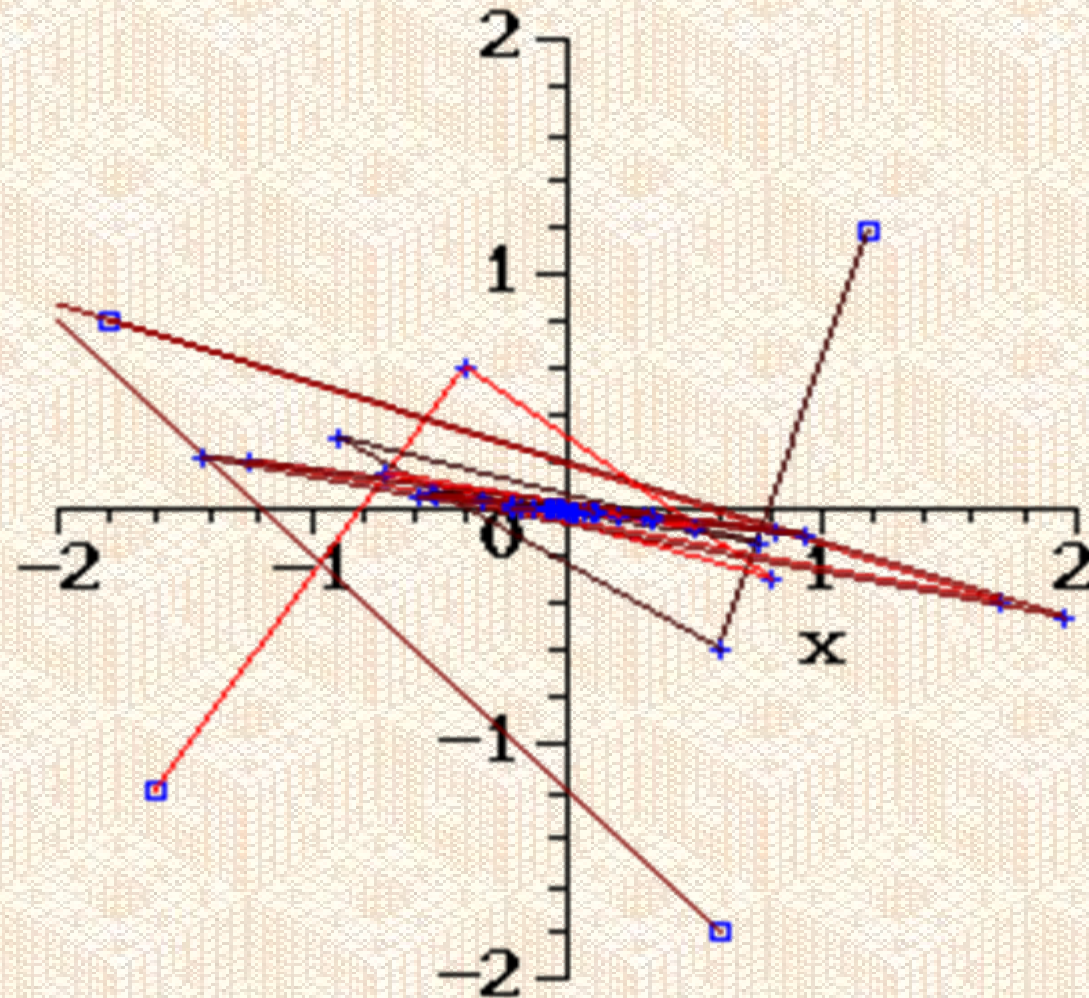


El origen es un punto atractivo

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$-1 < \lambda < 0$$

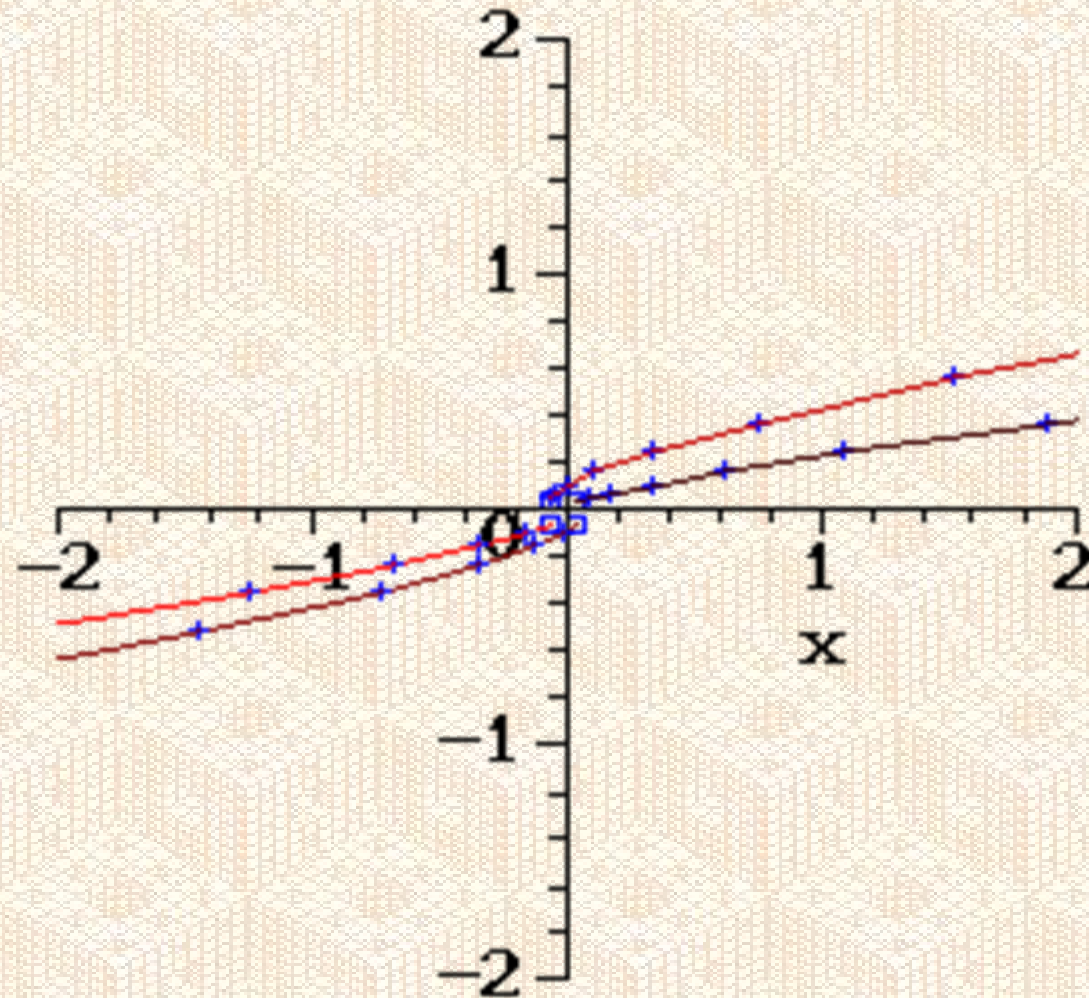


El origen es un punto atractivo

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda > 1$$

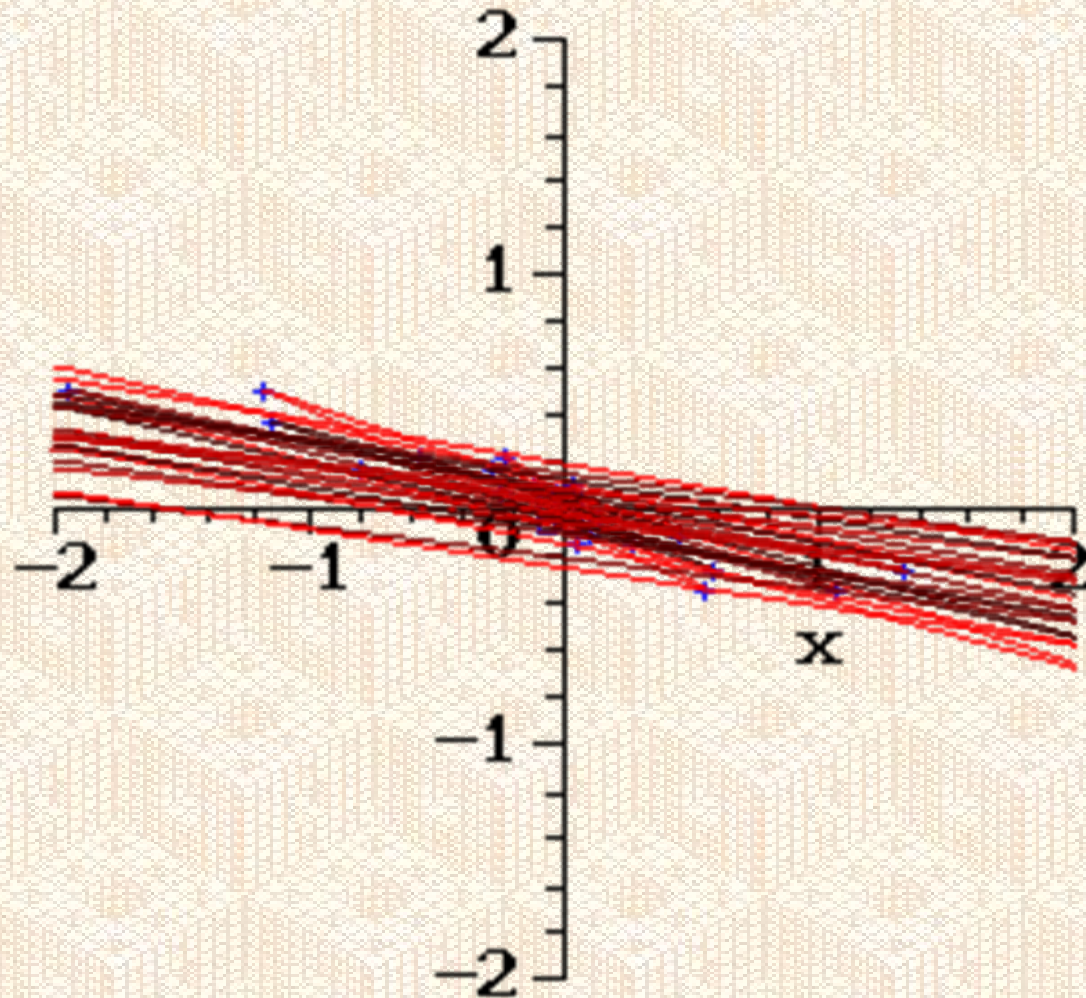


El origen es un punto repulsivo

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\lambda < -1$$

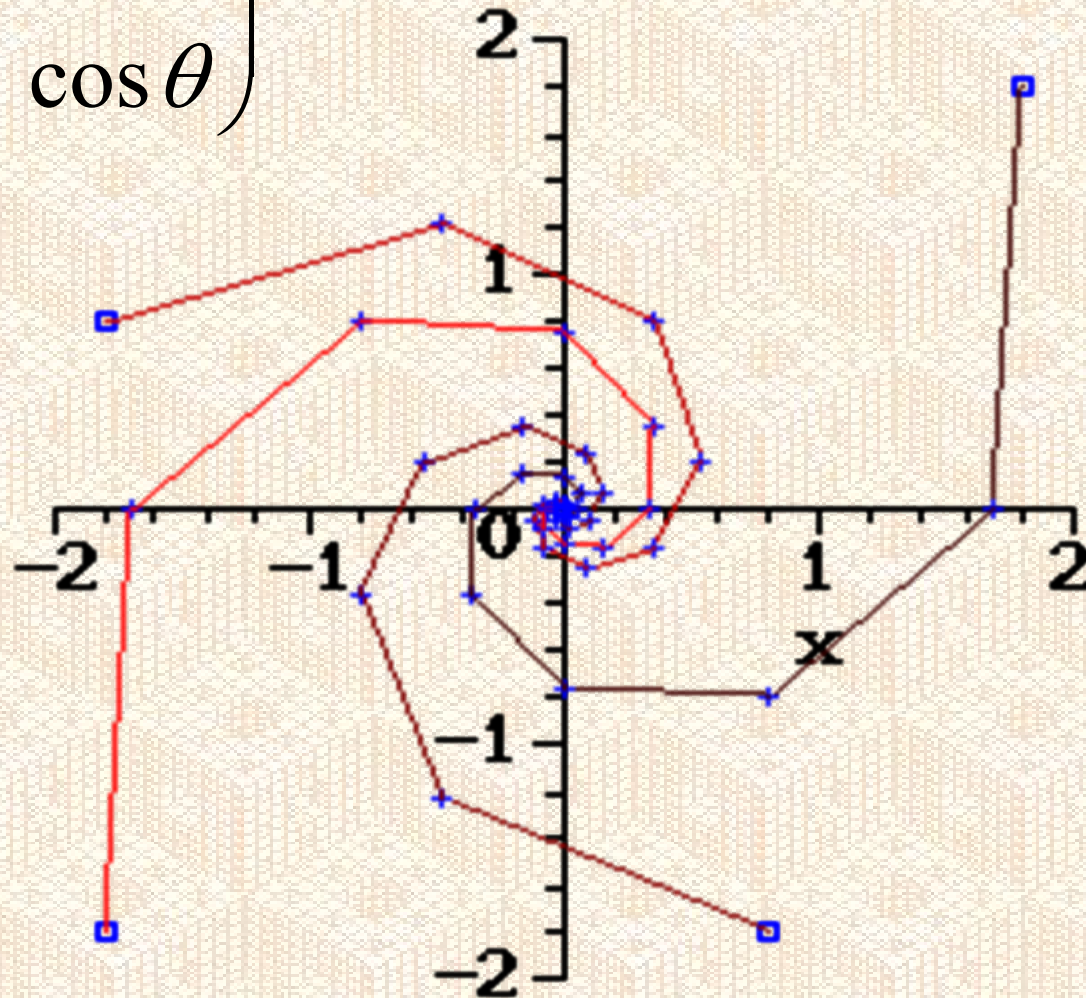


El origen es un punto repulsivo

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$0 < \rho < 1$$

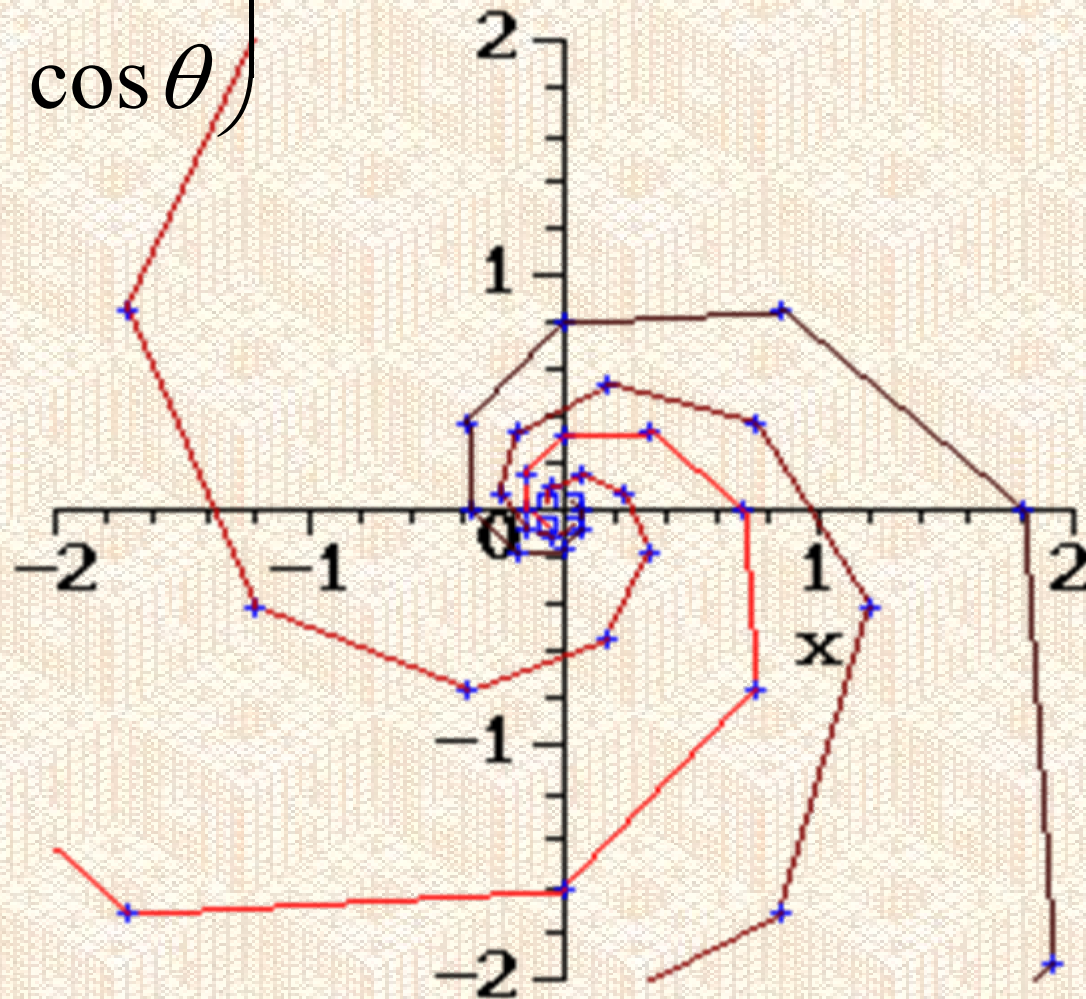


El origen es un punto atractivo

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

$$J = \rho \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\rho > 1$$



El origen es un punto repulsivo

# Dinámica de las Aplicaciones Lineales

Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación lineal. Se dice que  $f$  es hiperbólica si todos sus autovalores tienen módulo distinto de 1. En este caso la dinámica de  $f$  viene determinada por sus autovalores

**Ejercicio.** Representar las órbitas de  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x) = Ax$  en los siguientes casos:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{iv) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{v) } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# Dinámica de las Aplicaciones no Lineales

Si  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es invertible diferenciable y  $p$  es un punto fijo de  $f$ , el comportamiento de  $f$  cerca de  $p$  vendrá determinado por los autovalores de la matriz jacobiana  $f'(p)$  de  $f$  en  $p$ .

Así si todos los autovalores son menores en módulo que 1, entonces  $p$  es un punto fijo atractivo (existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $f^n(x) \rightarrow p$ , para todo  $x \in U$ )

Sí todos los autovalores son mayores en módulo que 1, entonces  $p$  es un punto fijo repulsivo (existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $f^{-n}(x) \rightarrow p$ , para todo  $x \in U$ )

Si un autovalor es mayor en módulo que 1 y el otro es menor que 1 en módulo, entonces  $p$  es un punto de silla

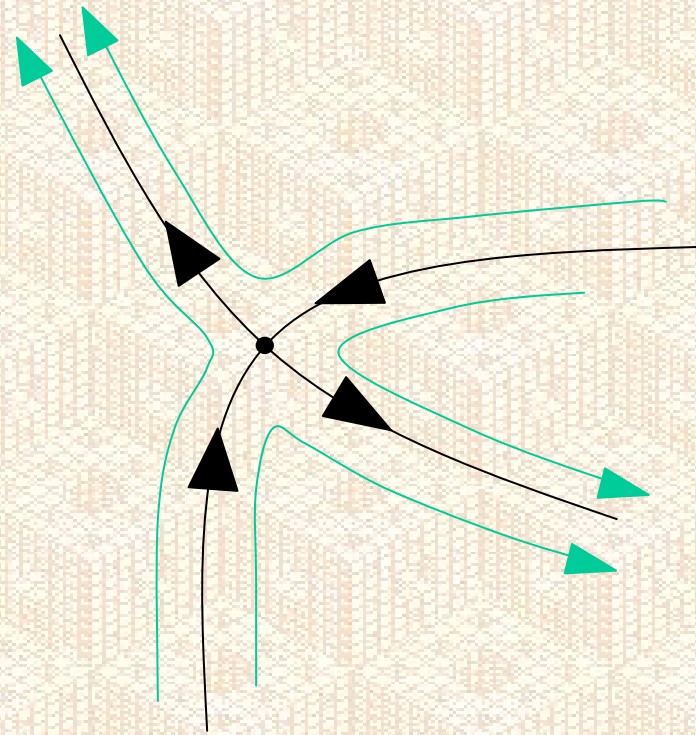
Se dice que  $p$  es hiperbólico si todos los autovalores de  $f'(p)$  tienen módulo distinto de 1.

# Dinámica de las Aplicaciones no Lineales

Sea  $p$  un punto de silla

Existe una curva invariante  $\gamma_s$  que pasa por  $p$ , llamada variedad estable, cuyos puntos cumplen que  $f^n(x) \rightarrow p$ , para todo  $x \in \gamma_s$

Existe otra curva invariante  $\gamma_u$ , llamada variedad inestable, cuyos puntos cumplen que  $f^{-n}(x) \rightarrow p$ , para todo  $x \in \gamma_u$



# Dinámica de las Aplicaciones no Lineales

Si  $p$  es un punto  $n$ -periódico de  $f$ , el comportamiento de  $f$  cerca de  $p$  vendrá determinado por la matriz de las derivadas parciales  $n$ -ésimas de  $f$  en  $p$  (si  $p$  es periódico  $(f^n)'$  tiene los mismos autovalores en todos los puntos de su órbita).

Si  $p$  es un punto periódico de  $f$  con periodo  $n$ ,  $p$  es hiperbólico si todos los autovalores de  $(f^n)'(p)$  tienen módulo distinto de 1.

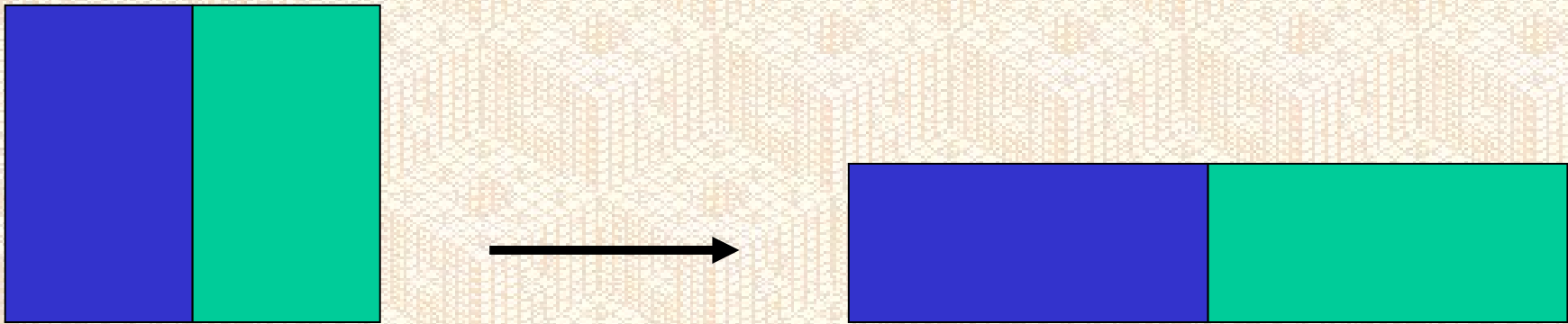
$p$  es atractivo si todos los autovalores de  $(f^n)'(p)$  tienen módulo menor que 1.

$p$  es repulsivo si todos los autovalores de  $(f^n)'(p)$  tienen módulo mayor que 1.

# La aplicación del panadero

Sea  $f$  equivalente a la composición de 2 acciones:

Una acción de 2-estirado en la dirección horizontal y  $(1/2)$ -contracción en la dirección vertical



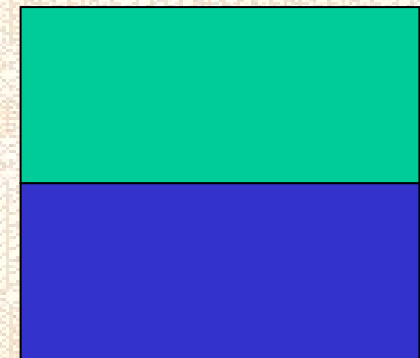
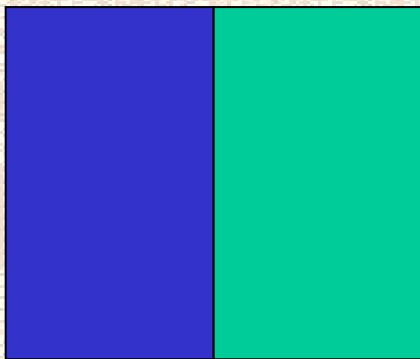
Y otra de cortado y pegado



# La aplicación del panadero

Formalmente,  $f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$  se define como

$$f(x, y) = \begin{cases} \left( 2x, \frac{1}{2}y \right) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \left( 2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



# La aplicación del panadero

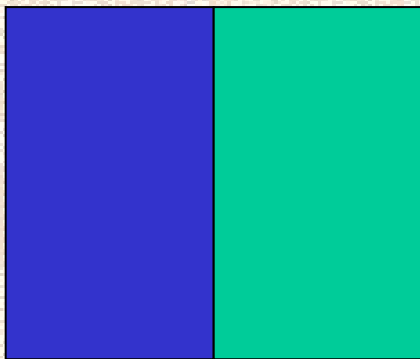
En codificación binaria:

$$f((0.a_0a_1a_2 \dots), (0.b_0b_1b_2 \dots)) = ((0.a_1a_2a_3 \dots), (0.a_0b_0b_1 \dots))$$

Si notamos  $(0.b_0b_1b_2 \dots) = (0.a_{-1}a_{-2}a_{-3} \dots)$  se puede expresar

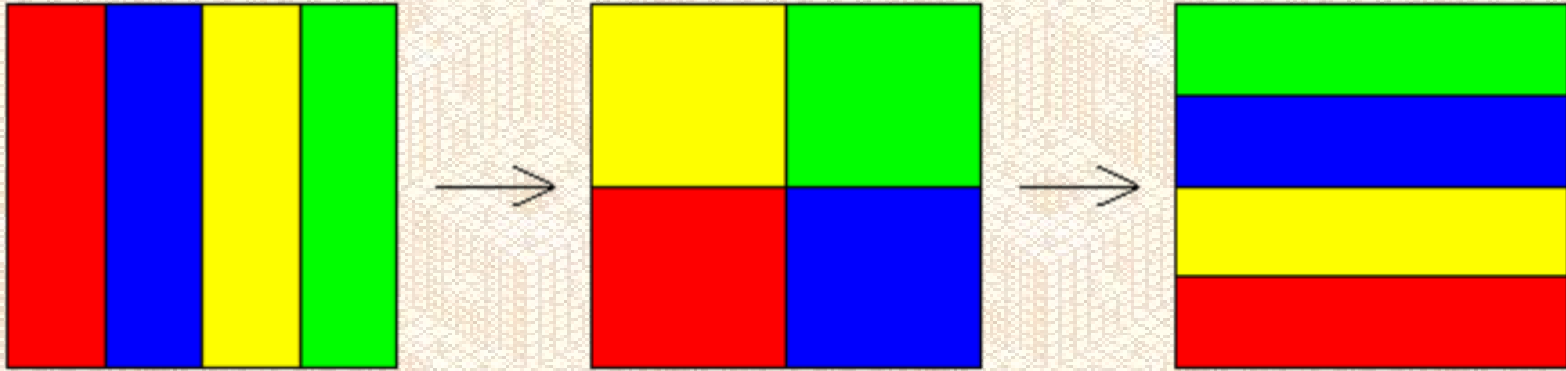
$$f(\dots a_{-3}a_{-2}a_{-1}.a_0a_1a_2a_3a_4 \dots) = (\dots a_{-3}a_{-2}a_{-1}a_0.a_1a_2a_3a_4 \dots)$$

**Teorema.** El sistema dinámico  $([0,1], f)$  es caótico.



# La aplicación del panadero

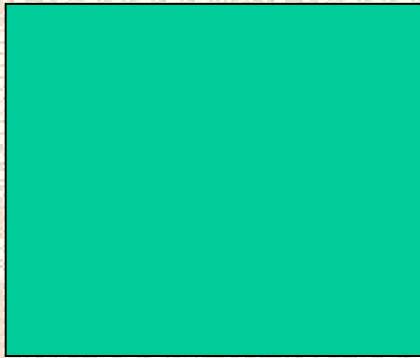
Tras 2 iteraciones de  $f$  se tiene:



# La herradura de Smale

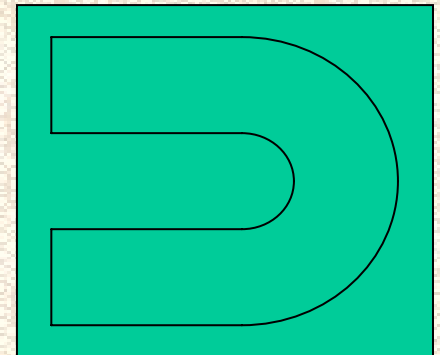
Sea  $f$  equivalente a la composición de 2 acciones:

Una acción de estirado en la dirección horizontal y  
contracción mayor en la dirección vertical



Y otra de doblado

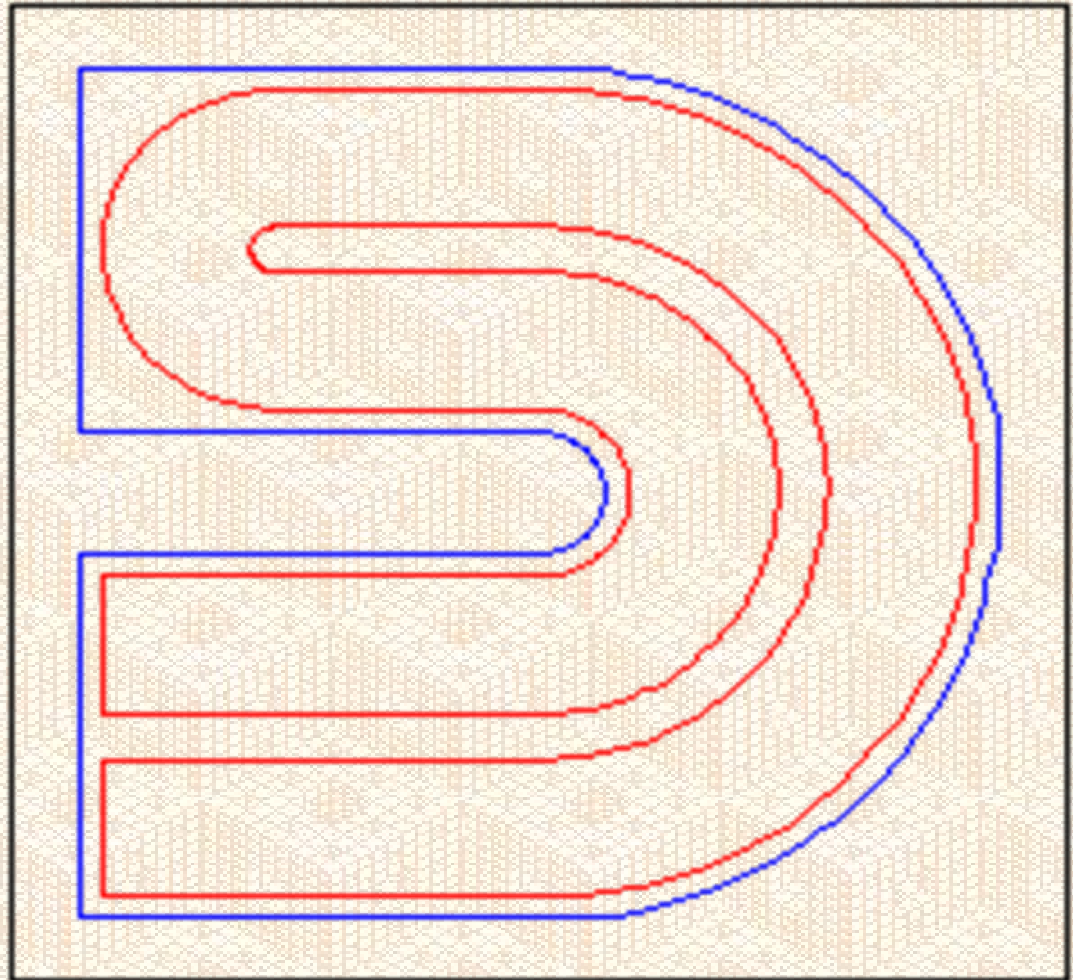
Colocando el resultado dentro  
del cuadrado inicial



# La herradura de Smale

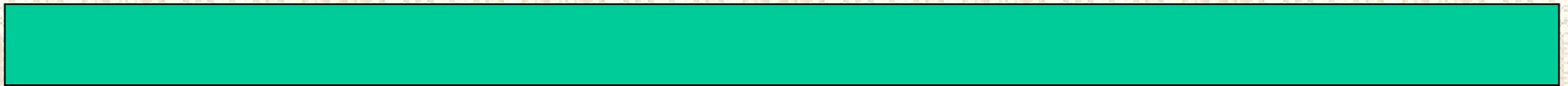
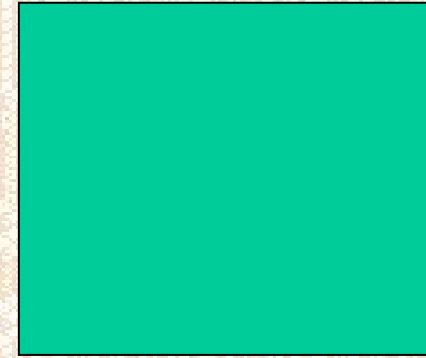
Tras 2 iteraciones de  $f$  se tiene

El conjunto límite  $\Lambda$  es compacto, no vacío y localmente es el producto de un intervalo por un conjunto de tipo Cantor.

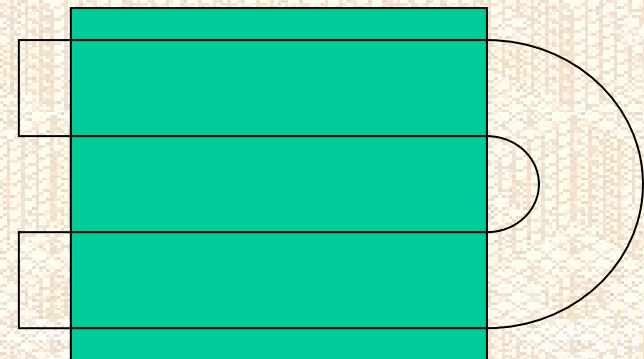


## La herradura de Smale (II)

Una variante consiste en componer una  $\lambda$ -contracción con un  $1/\lambda$ -expansión

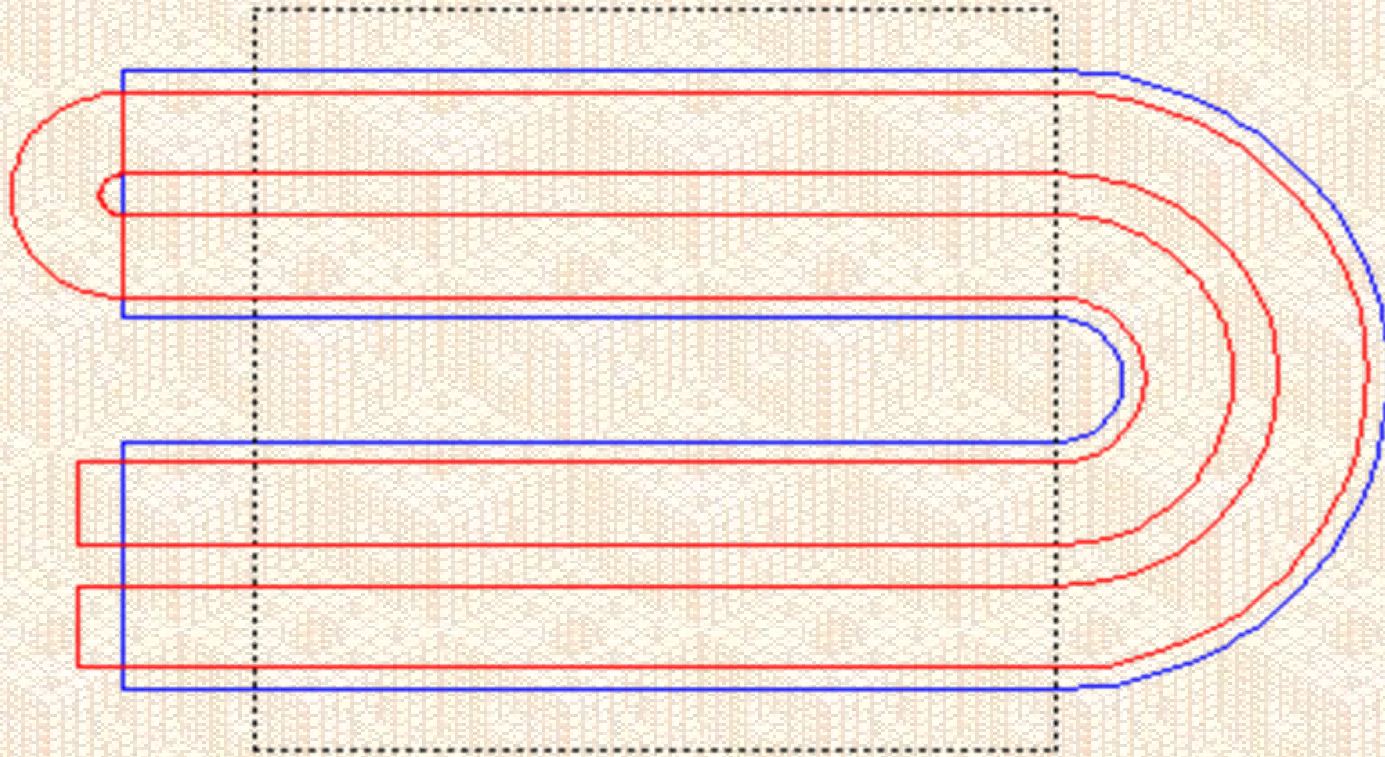


De tal forma que al colocar el resultado en el interior del cuadrado sobresaldrá por los extremos.



# La herradura de Smale (II)

Tras 2 iteraciones de  $f$  se tiene



# El atractor de Hénon

Sea  $H_{ab} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $H_{ab}(x, y) = (1 + y - ax^2, bx)$

Vamos a ver para qué valores de  $a$  y  $b$  existen puntos fijos.  
Cuando existan, éstos serán las soluciones de

$$\begin{cases} 1 + y - ax^2 = x \\ bx = y \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtienen los valores

$$p^+ = \frac{b - 1 + \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}}{2a} (1, b)$$

$$p^- = \frac{b - 1 - \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}}{2a} (1, b)$$

# El atractor de Hénon

Por tanto  $H_{ab}$  tendrá 0, 1 o 2 puntos fijos según sea el signo del discriminante anterior. En particular, tiene 1 punto fijo si  $a = -(b-1)^2/4$  y 2 puntos fijos si  $a > -(b-1)^2/4$ .

Por otra parte, la matriz jacobiana de  $H_{ab}$  en un punto  $(x_0, y_0)$  es

$$\begin{pmatrix} -2ax_0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son

$$\lambda_1 = -ax_0 + \sqrt{ax_0^2 + b} \text{ y } \lambda_2 = -ax_0 - \sqrt{ax_0^2 + b}$$

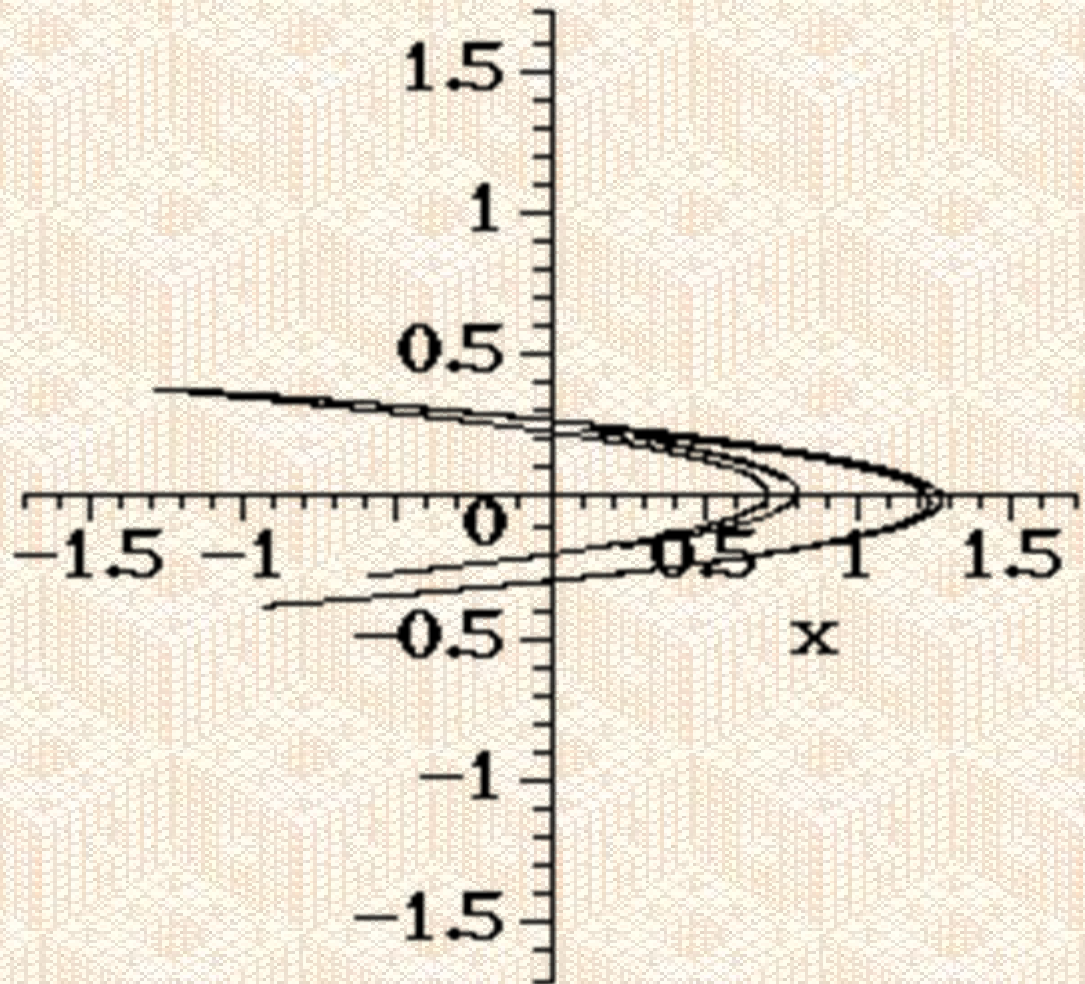
Entonces  $p^-$  es un punto de silla y  $p^+$  es atractivo hasta cierto valor a partir del cual se transforma en punto de silla a la vez que aparece un 2-ciclo atractivo.

# El atractor de Hénon

En el resto de la sección nos vamos a centrar en el caso  $a=1.4$  y  $b=0.3$ .

En este caso un estado avanzado de la órbita del origen es

El conjunto al que converge la órbita del origen es el atractor de Hénon.

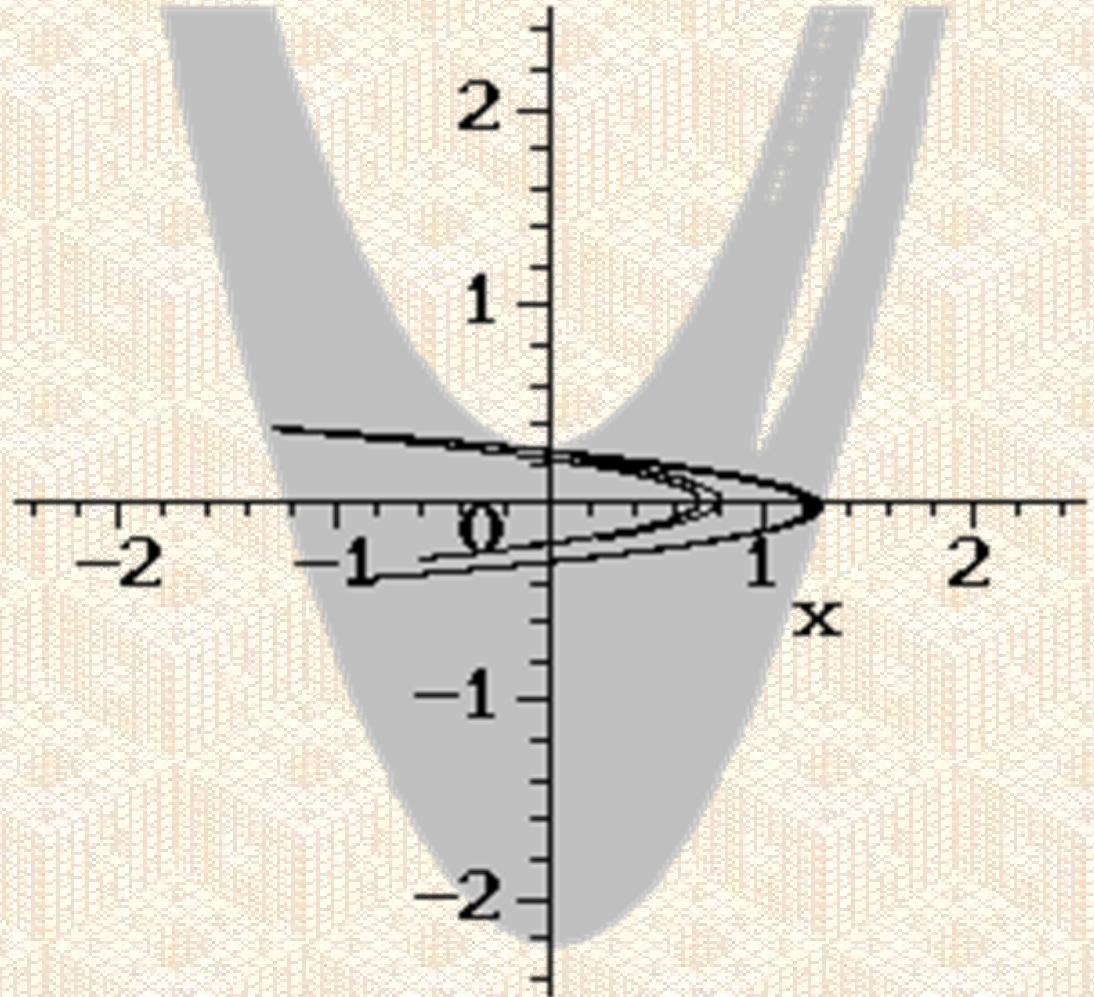


# El atractor de Hénon

Sin embargo, no todos los puntos del plano convergen al atractor de Hénon

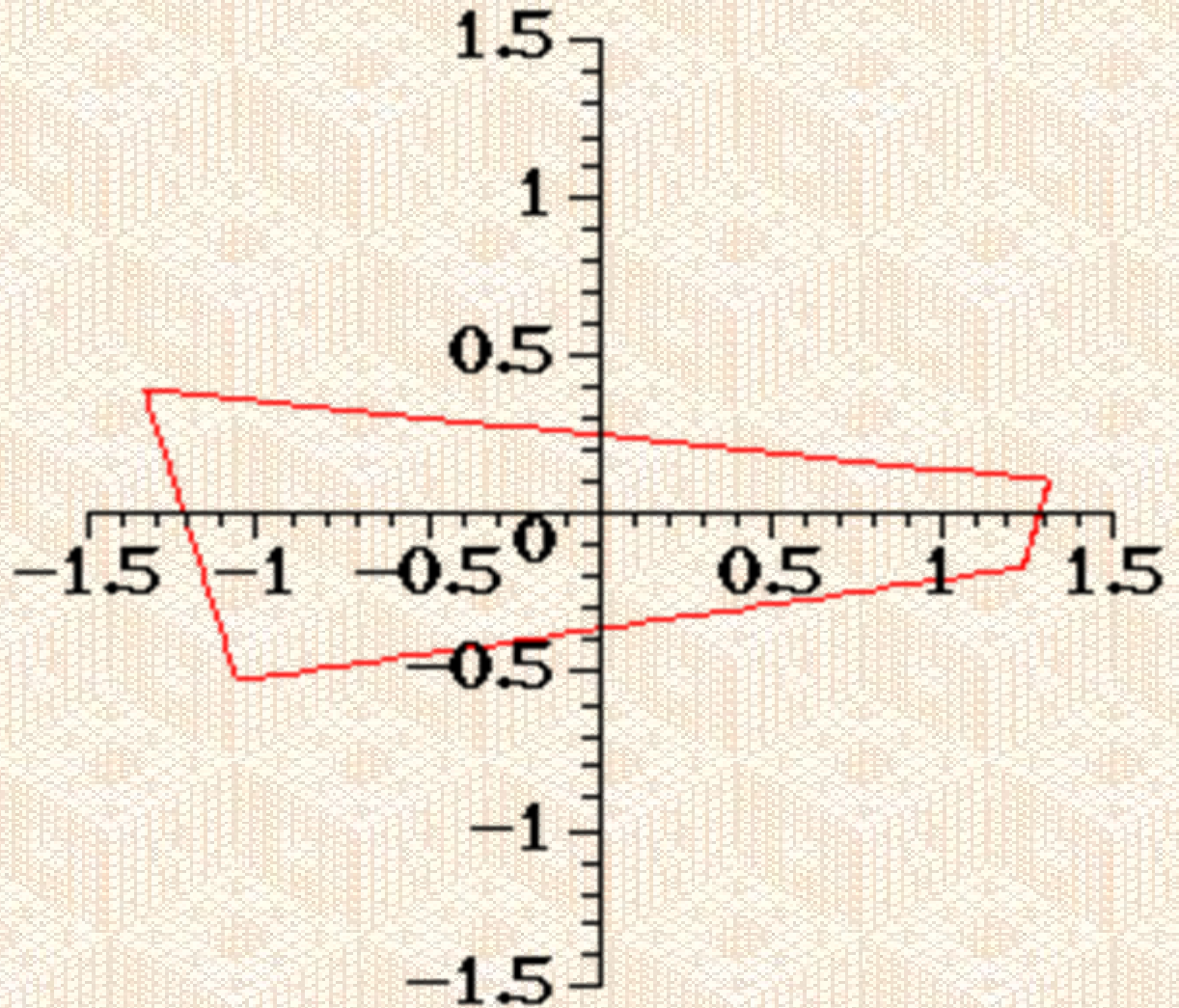
En la figura vemos

el atractor de Hénon y su cuenca de atracción



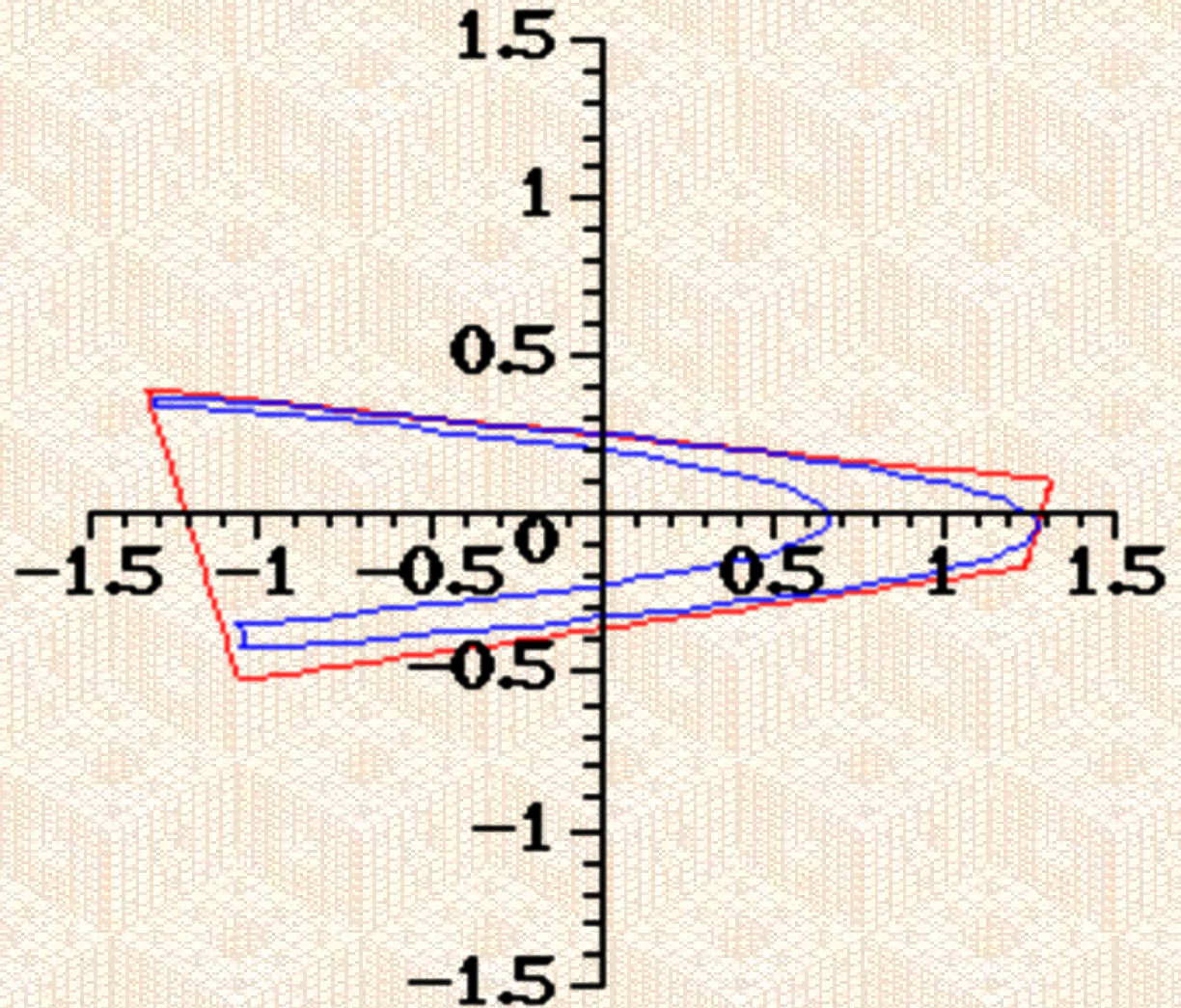
# El atractor de Hénon

Para ver cómo actúa  $H_{ab}$  sobre la cuenca de atracción tomamos un cuadrilátero invariante y le aplicamos reiteradamente la aplicación de Hénon



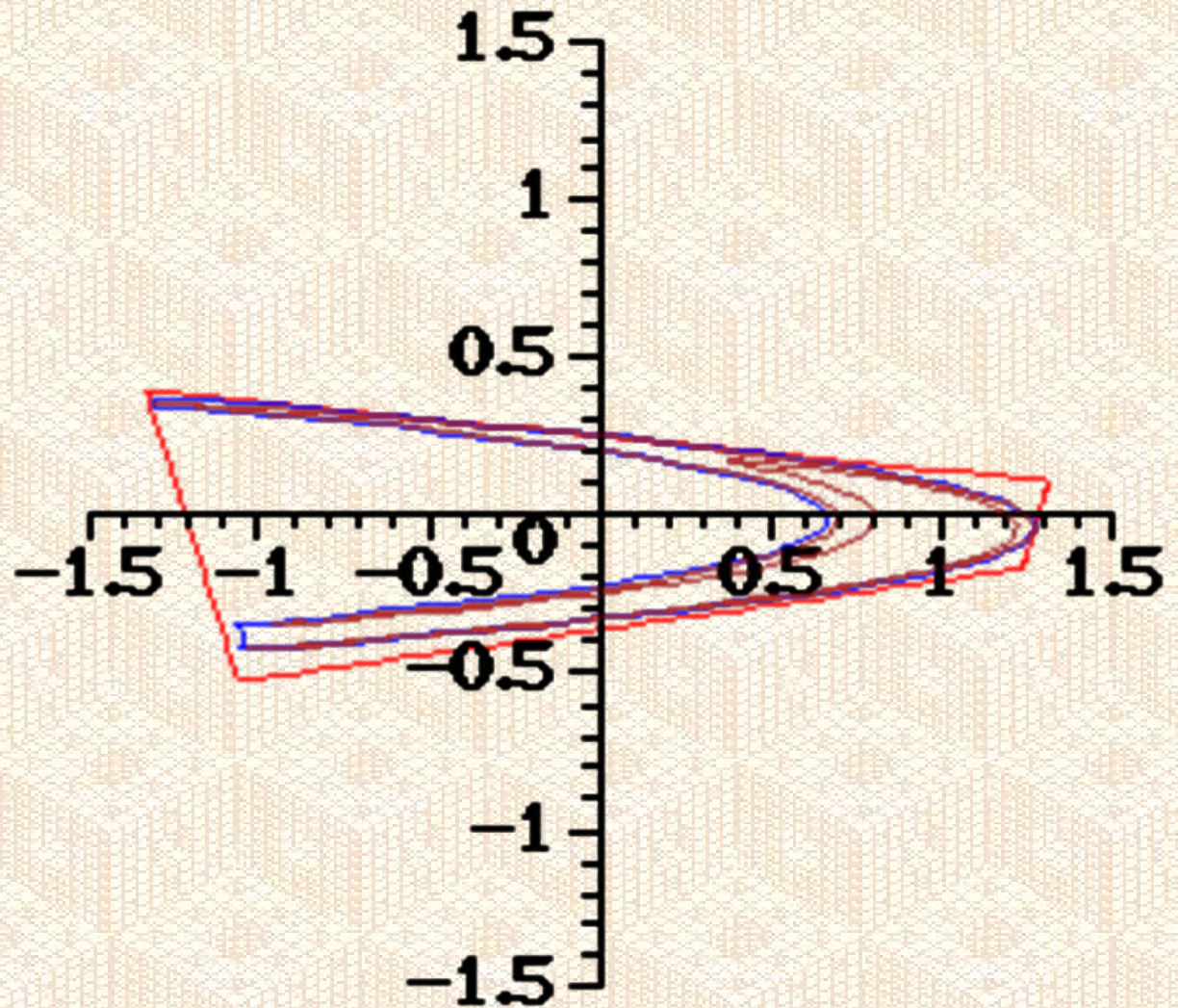
# El atractor de Hénon

Para ver cómo actúa  $H_{ab}$  sobre la cuenca de atracción tomamos un cuadrilátero invariante y le aplicamos reiteradamente la aplicación de Hénon



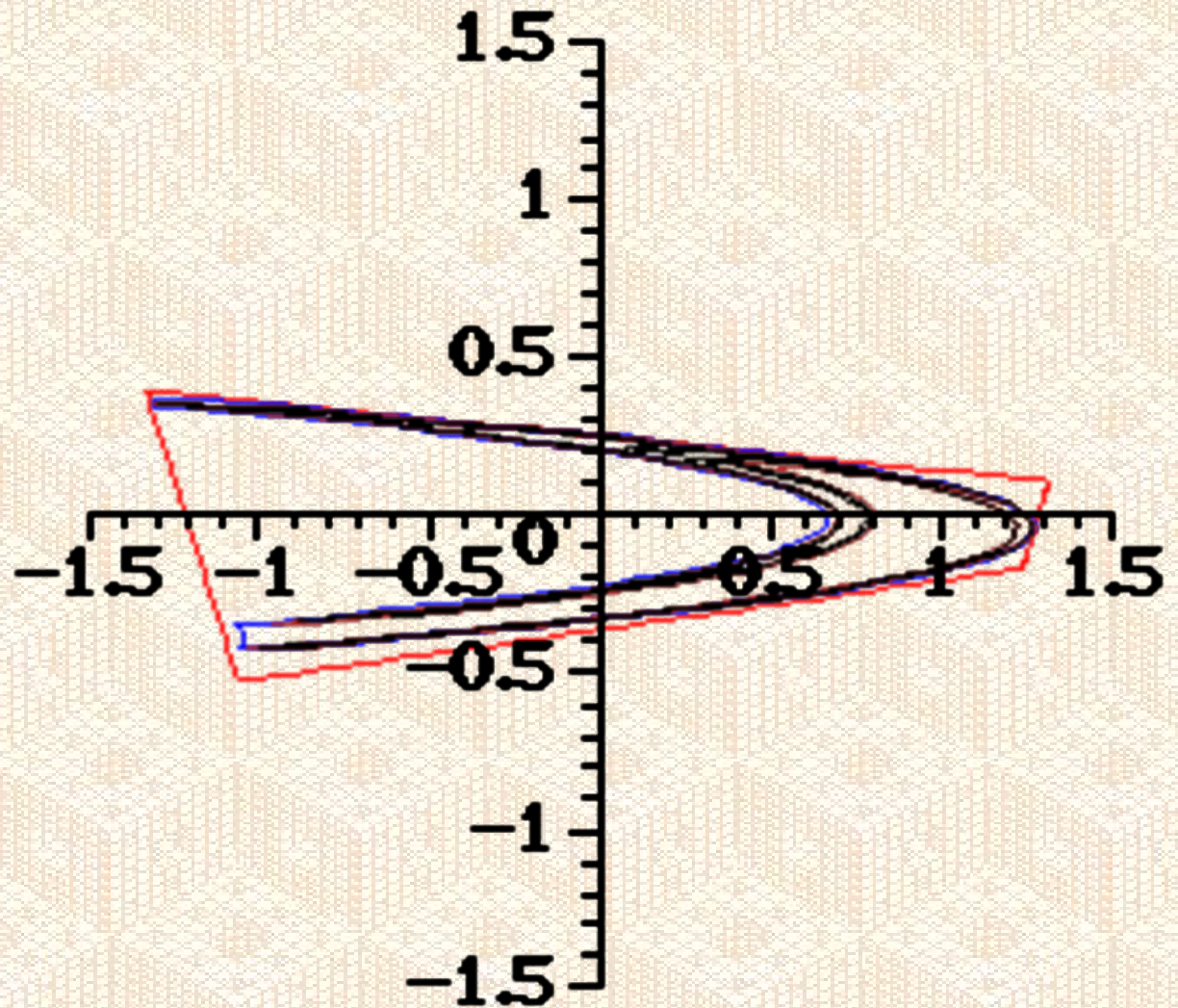
# El atractor de Hénon

Para ver cómo actúa  $H_{ab}$  sobre la cuenca de atracción tomamos un cuadrilátero invariante y le aplicamos reiteradamente la aplicación de Hénon



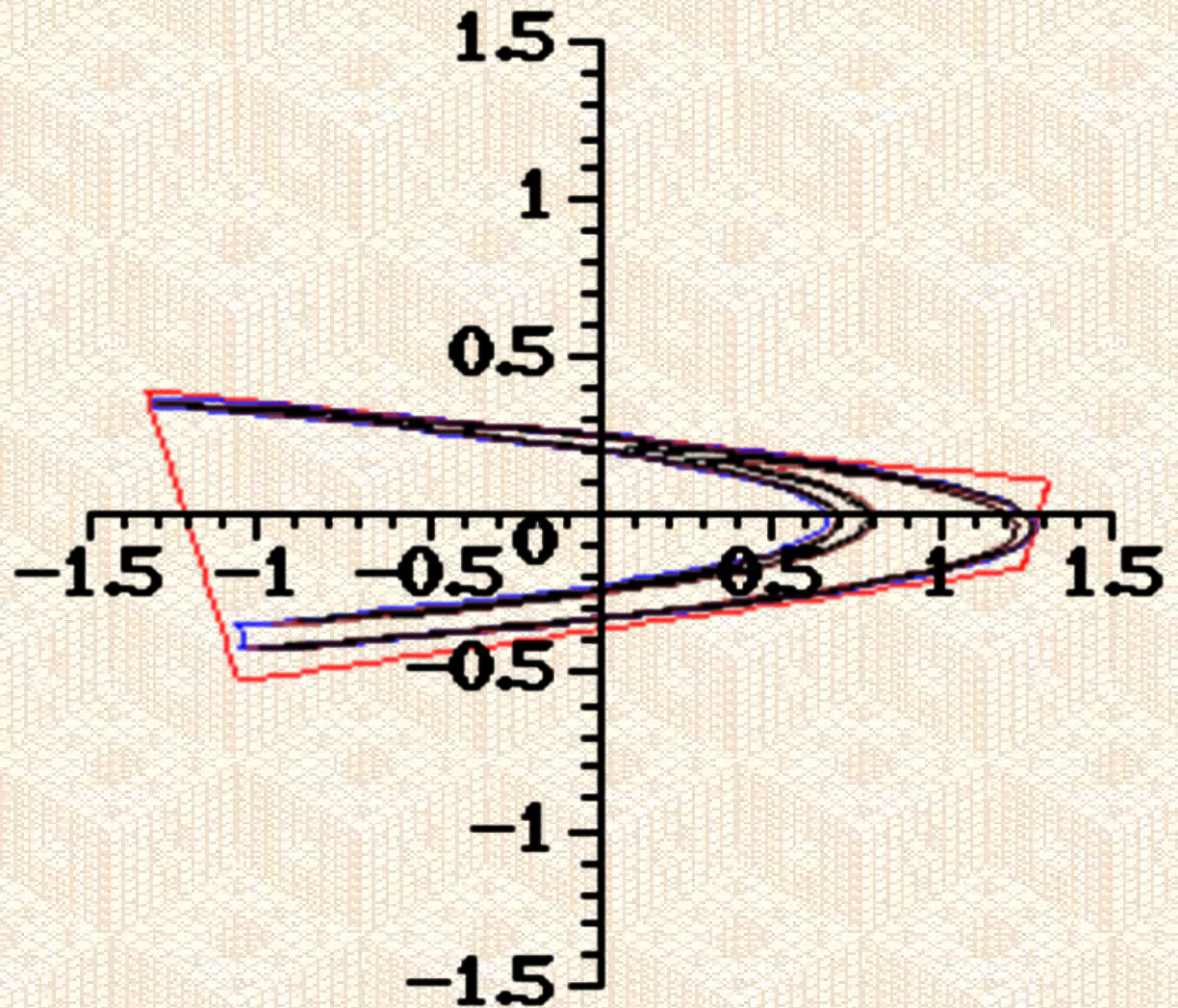
# El atractor de Hénon

Para ver cómo actúa  $H_{ab}$  sobre la cuenca de atracción tomamos un cuadrilátero invariante y le aplicamos reiteradamente la aplicación de Hénon



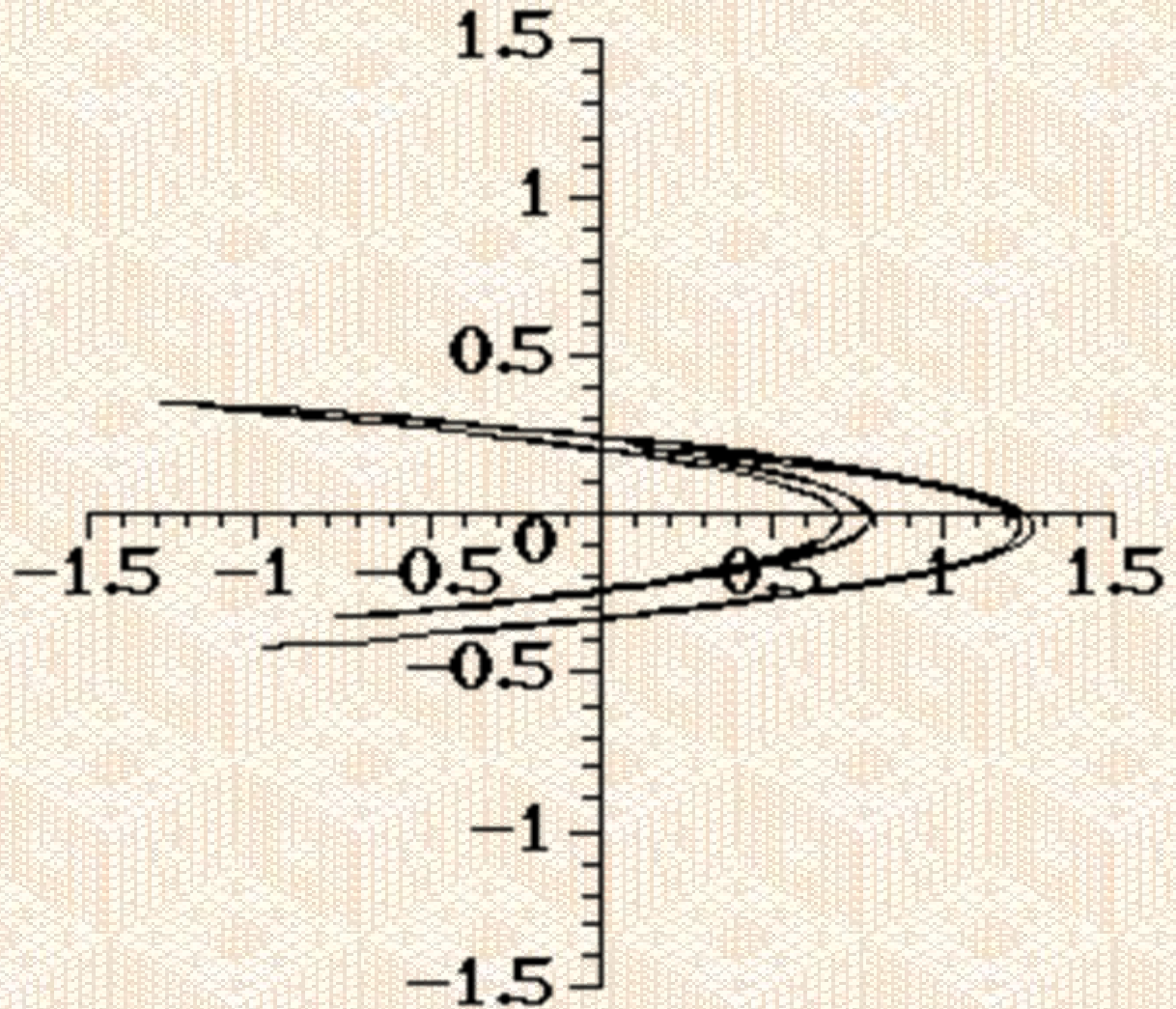
# El atractor de Hénon

Vemos que la transformación que hace  $H_{ab}$  con el cuadrilátero es del tipo de una herradura de Smale.



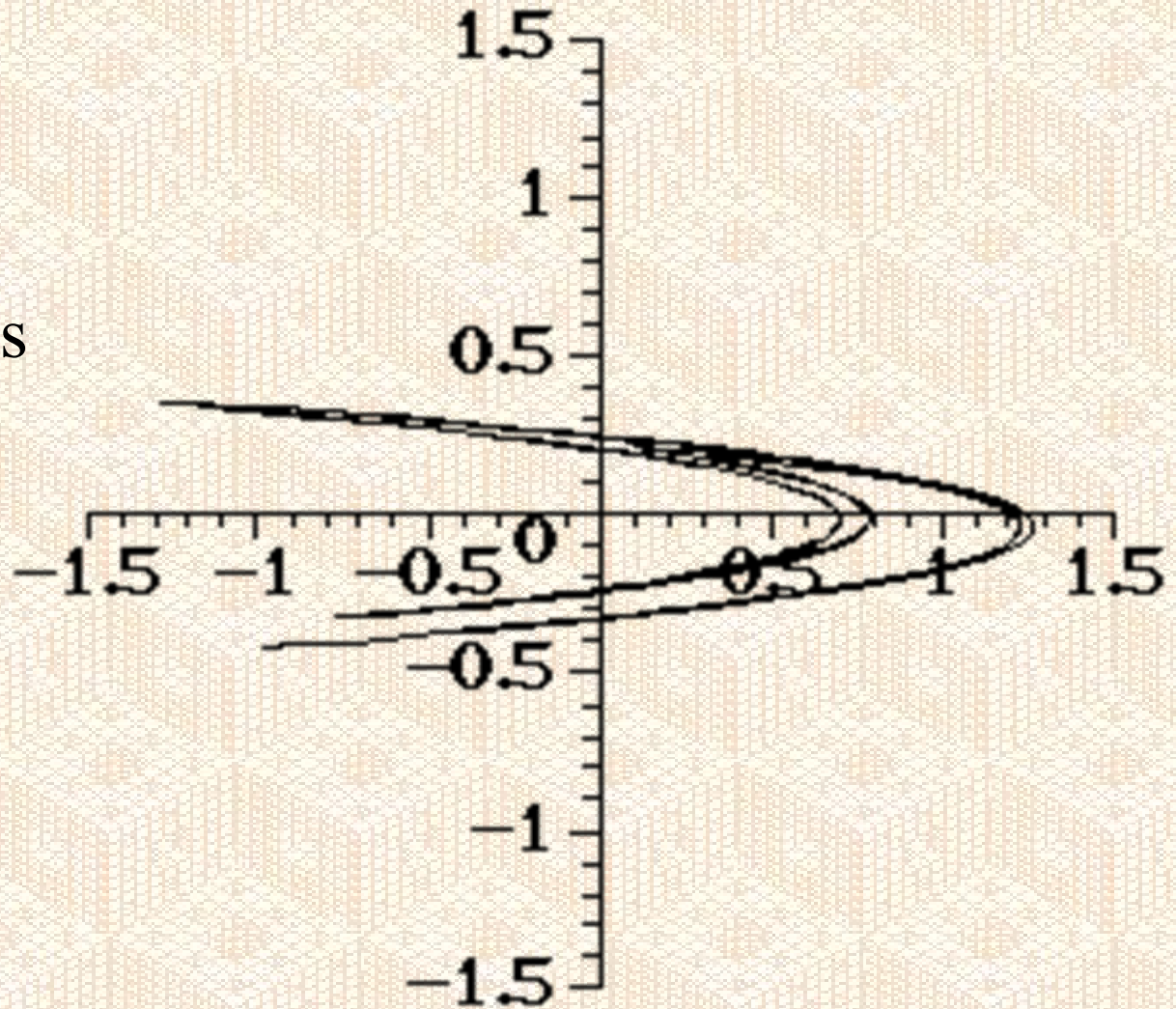
# El atractor de Hénon

En particular, veremos que, al igual que ocurría con la herradura de Smale, el atractor de Hénon es localmente el producto de un intervalo por un conjunto de tipo Cantor.



# El atractor de Hénon

En las imágenes anteriores también se ve que la aplicación  $H_{ab}$  contrae áreas. La razón de contracción es justamente el valor absoluto del determinante de la matriz Jacobiana que vale  $|b|=0.3$ . Como consecuencia, el atractor de Hénon tendrá área 0



# El atractor de Hénon

Para ver cómo se manifiesta la invarianza del atractor, observamos que

$$H_{ab}(x,y) = (1+y-ax^2, bx) \\ = h_3 h_2 h_1(x,y),$$

donde

$$h_1(x,y) = (x, 1+y-ax^2),$$

$$h_2(x,y) = (bx, y) \text{ y}$$

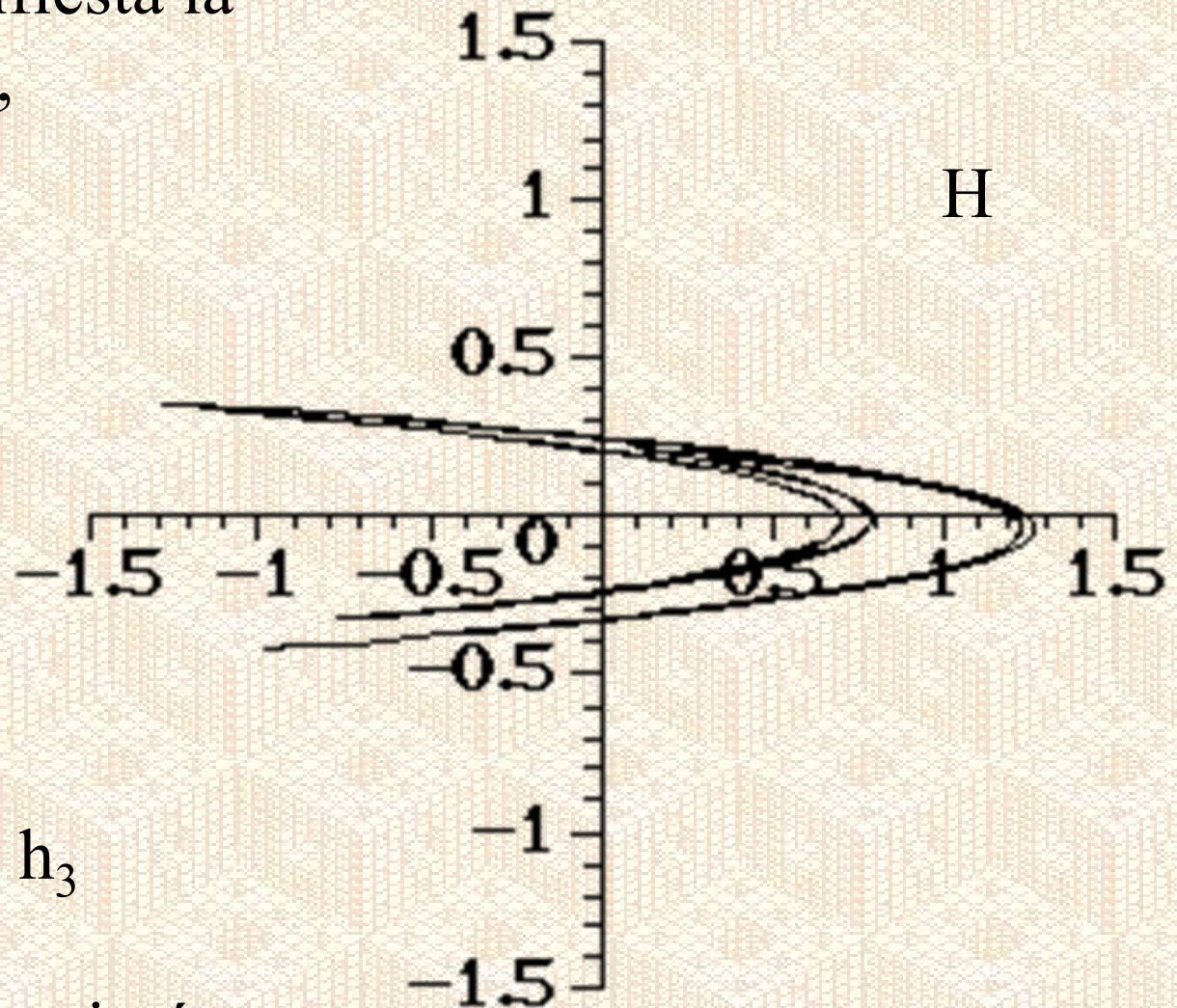
$$h_3(x,y) = (y, x).$$

Si aplicamos

sucesivamente  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$

al atractor de Hénon

obtenemos las siguientes imágenes



# El atractor de Hénon

Para ver cómo se manifiesta la invarianza del atractor, observamos que

$$H_{ab}(x,y) = (1+y-ax^2, bx) \\ = h_3 h_2 h_1(x,y),$$

donde

$$h_1(x,y) = (x, 1+y-ax^2),$$

$$h_2(x,y) = (bx, y) \text{ y}$$

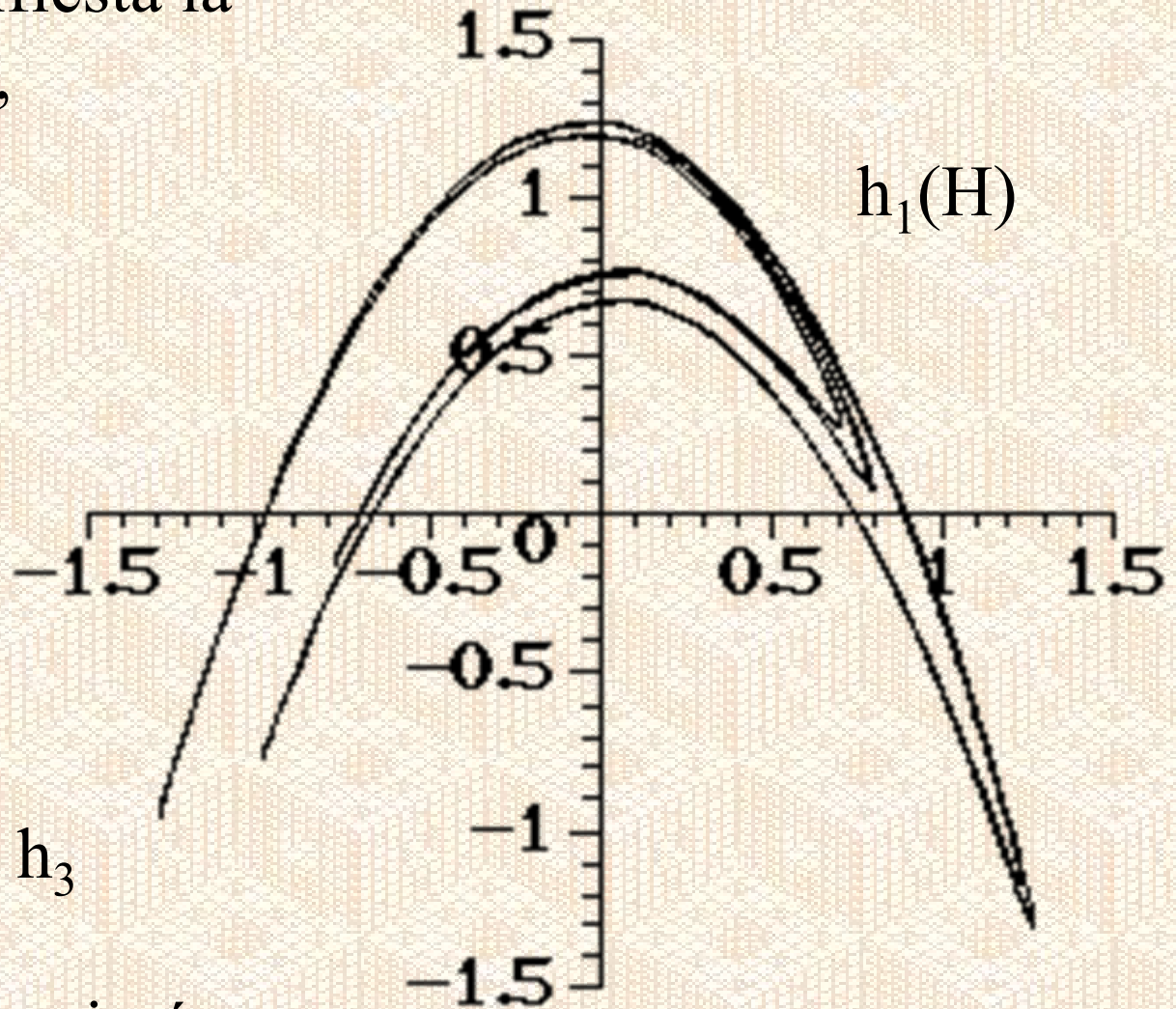
$$h_3(x,y) = (y, x).$$

Si aplicamos

sucesivamente  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$

al atractor de Hénon

obtenemos las siguientes imágenes



# El atractor de Hénon

Para ver cómo se manifiesta la invarianza del atractor, observamos que

$$H_{ab}(x,y) = (1+y-ax^2, bx) \\ = h_3 h_2 h_1(x,y),$$

donde

$$h_1(x,y) = (x, 1+y-ax^2),$$

$$h_2(x,y) = (bx, y) \text{ y}$$

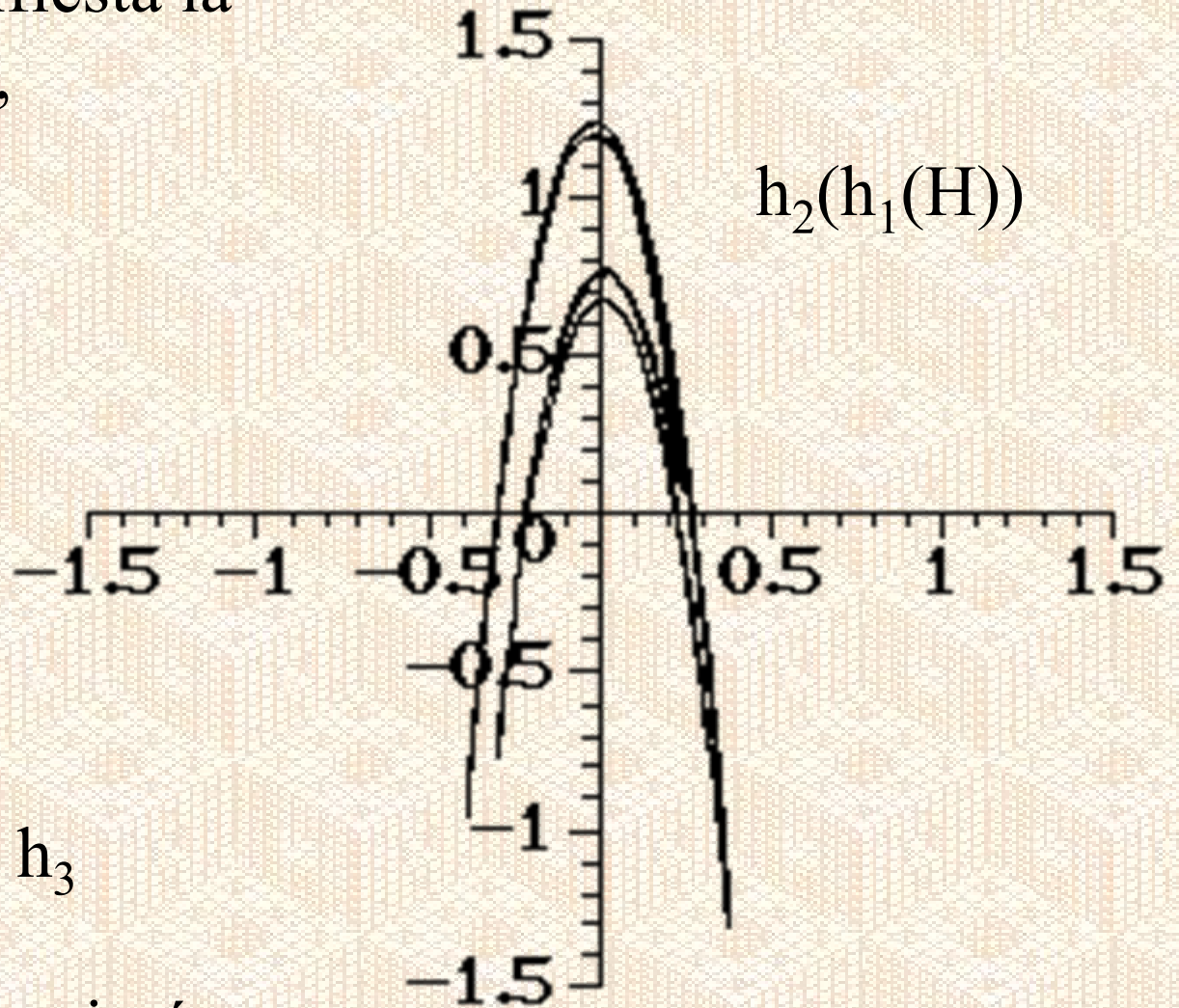
$$h_3(x,y) = (y, x).$$

Si aplicamos

sucesivamente  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$

al atractor de Hénon

obtenemos las siguientes imágenes



# El atractor de Hénon

Para ver cómo se manifiesta la invarianza del atractor,

observamos que

$$\begin{aligned} H_{ab}(x,y) &= (1+y-ax^2, bx) \\ &= h_3 h_2 h_1(x,y), \end{aligned}$$

donde

$$h_1(x,y) = (x, 1+y-ax^2),$$

$$h_2(x,y) = (bx, y) \text{ y}$$

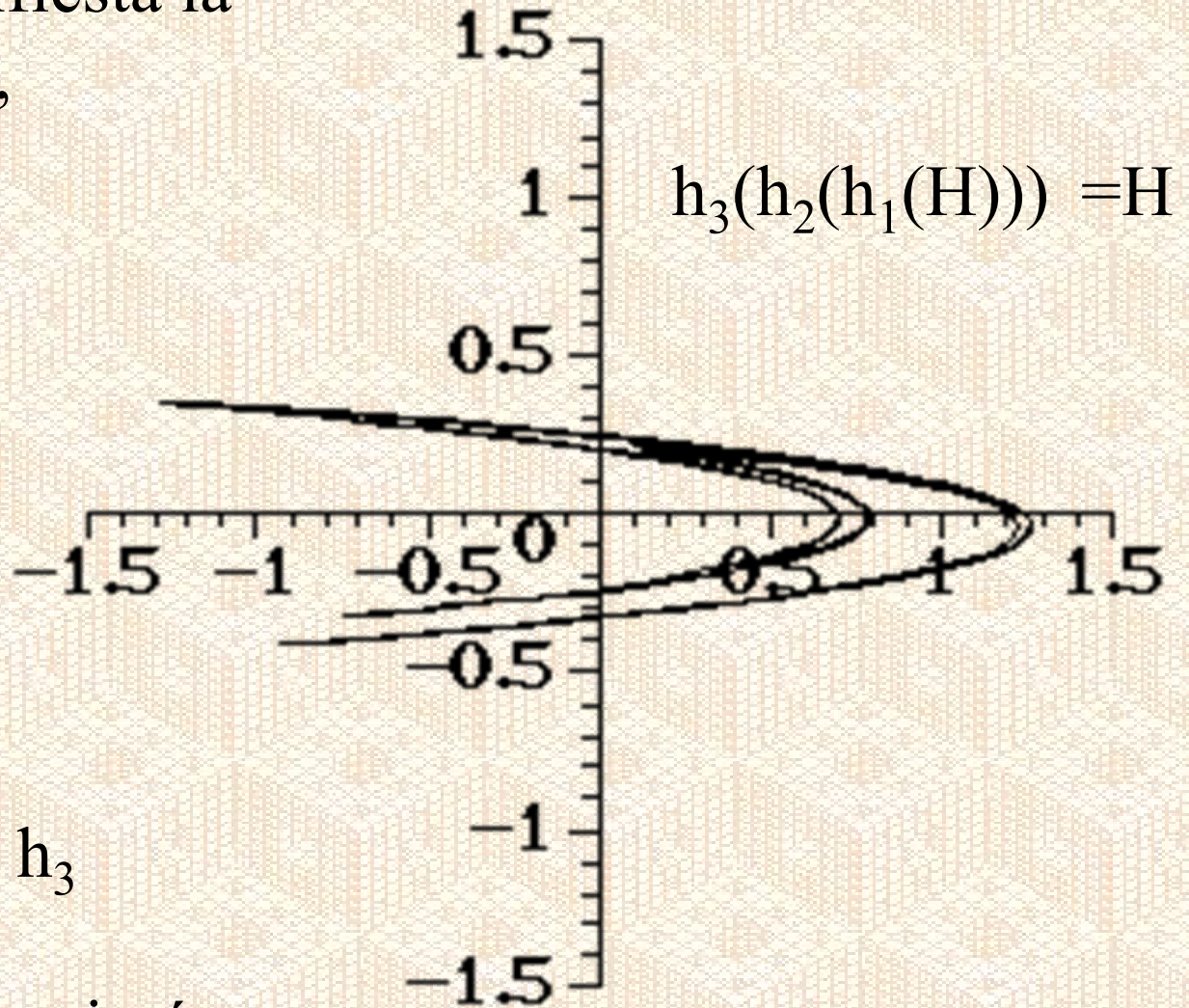
$$h_3(x,y) = (y, x).$$

Si aplicamos

sucesivamente  $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$

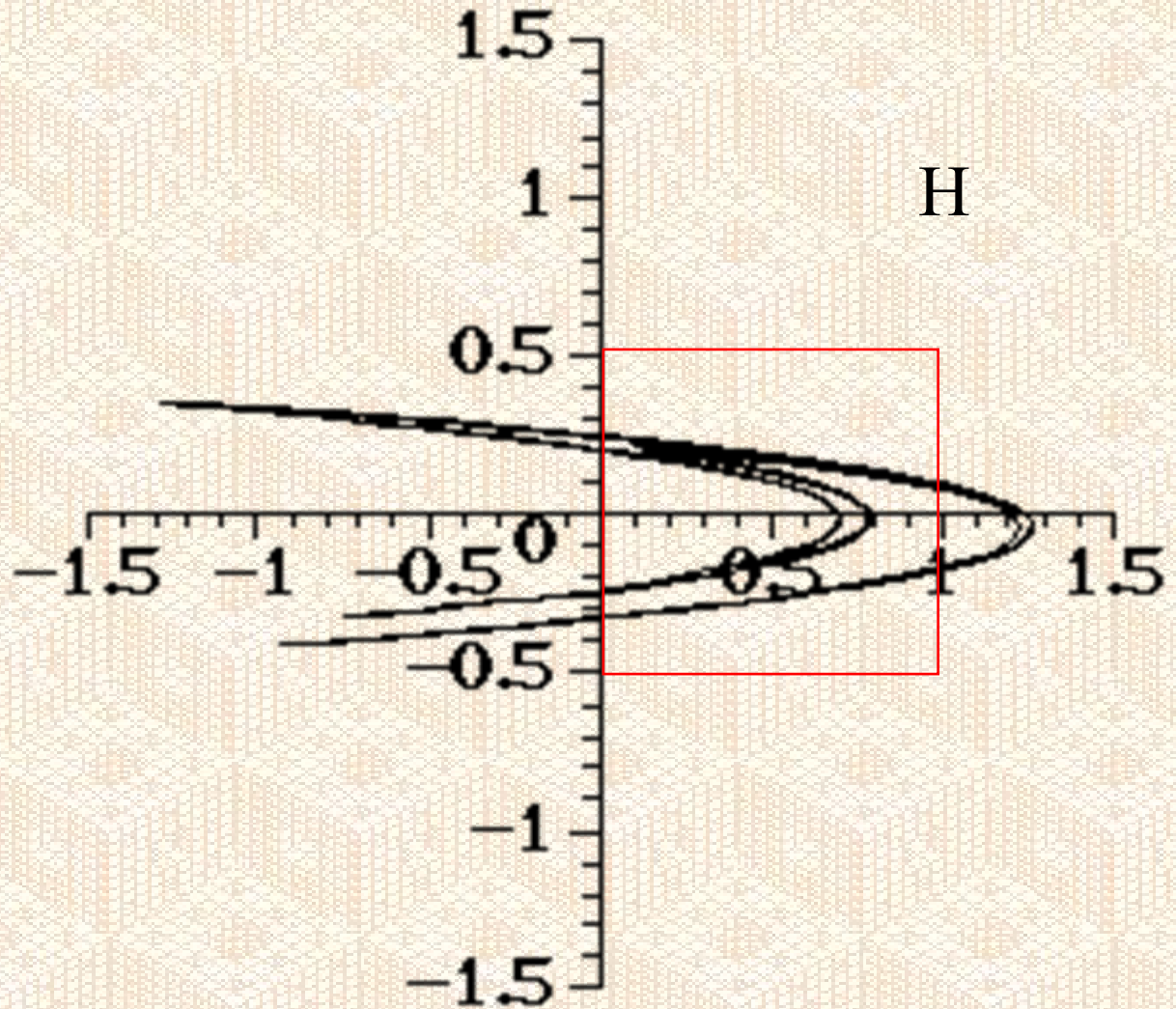
al atractor de Hénon

obtenemos las siguientes imágenes



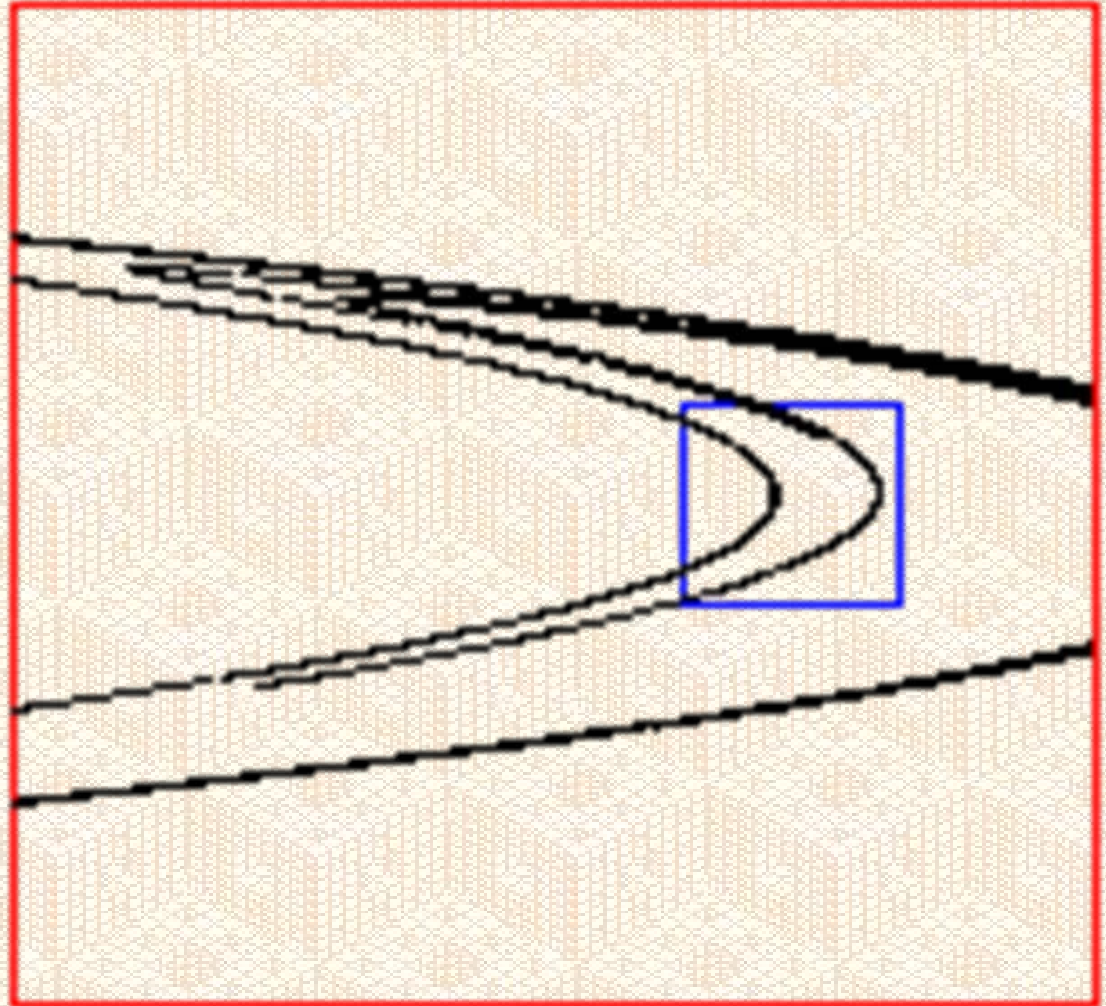
# El atractor de Hénon

En las siguientes gráficas se muestran ampliaciones de la órbita del origen, donde se puede ver que, localmente, el atractor de Hénon es un producto de un conjunto de tipo Cantor por un intervalo.



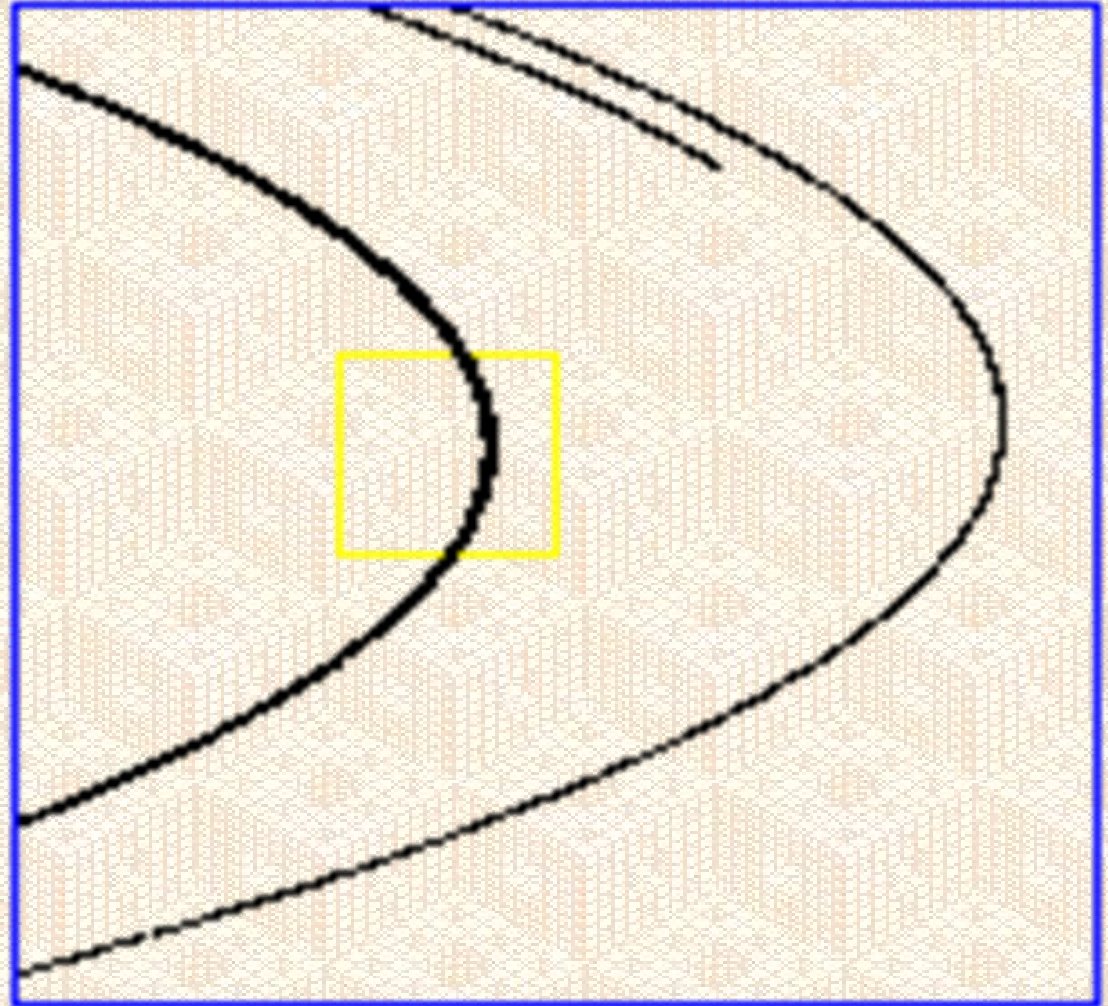
# El atractor de Hénon

En las siguientes gráficas se muestran ampliaciones de la órbita del origen, donde se puede ver que, localmente, el atractor de Hénon es un producto de un conjunto de tipo Cantor por un intervalo.



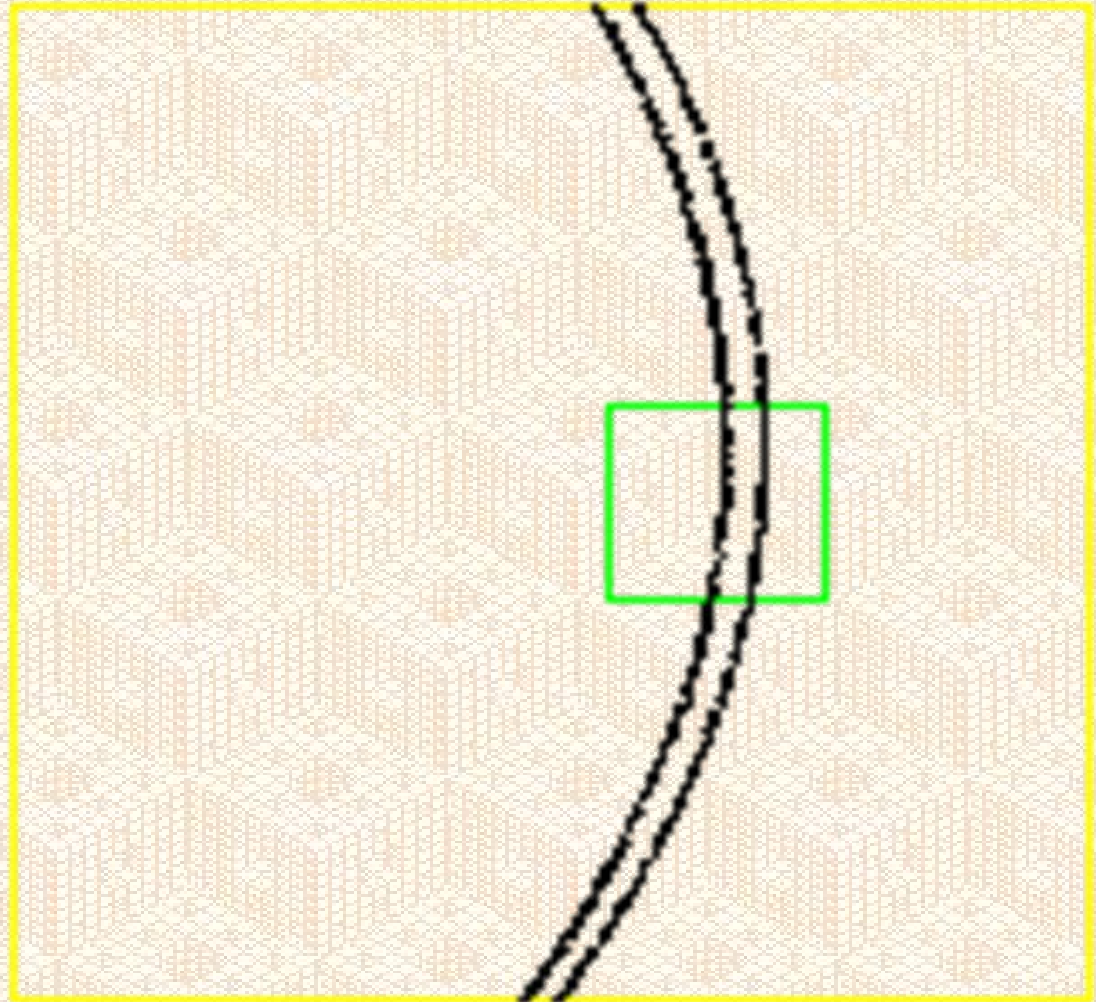
# El atractor de Hénon

En las siguientes gráficas se muestran ampliaciones de la órbita del origen, donde se puede ver que, localmente, el atractor de Hénon es un producto de un conjunto de tipo Cantor por un intervalo.



# El atractor de Hénon

En las siguientes gráficas se muestran ampliaciones de la órbita del origen, donde se puede ver que, localmente, el atractor de Hénon es un producto de un conjunto de tipo Cantor por un intervalo.



# El atractor de Hénon

En las siguientes gráficas se muestran ampliaciones de la órbita del origen, donde se puede ver que, localmente, el atractor de Hénon es un producto de un conjunto de tipo Cantor por un intervalo.



# El atractor de Hénon

Para terminar vamos a ver cómo se reconstruye el atractor de Hénon, si dada la órbita  $\{(x_n, y_n)\}$  de un punto del atractor, representamos las sucesiones  $\{(x_n, x_{n+1})\}$  de  $k$ -retardo

