3. Sistemas dinámicos caóticos (Práctica 3)

Ejercicio 3.1. Considérese la función "shift" S. Al ser una función definida a trozos hay que construirla como sigue

```
> S:=x->if evalf(x)<1/2 then 2*x else 2*x-1 fi;
```

o mediante un procedimiento

```
> S:=proc(x) if evalf(x)<1/2 then 2*x else 2*x-1 fi; end;
```

Construye un procedimiento "analisisgraficoshift(p,n)", adaptando "analisisgrafico" a esta función particular, para representar la órbita de un punto (no hace falta que sea animado).

Sabemos que un punto es periódico o preperiódico si y solo si es racional. Comprobarlo, representando las órbitas de los números $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{16}$. Determina si son puntos periódicos o preperiódicos y la longitud del periodo. ¿Hay alguna relación entre el denominador de la fracción y la longitud del periodo? ¿Hay más ciclos distintos para cada uno de los periodos que aparecen? ¿Cuántos? Si observas alguna otra relación o propiedad coméntala.

Representa la órbita del punto $\frac{1}{\sqrt{2}}$. ¿Es densa?

Teniendo en cuenta que en el procedimiento "analisisgrafico(f,p,n,d,e)" se tomaba como punto inicial de la órbita el punto a:=evalf(p), discute, apoyándote en los resultados obtenidos para los puntos anteriores, la conveniencia de poner a:=evalf(p) o a:=p en el procedimiento "analisisgraficoshift(p,n)".

Indicación:

Ejercicio 3.2. Considérese de nuevo la función "shift" S. En base 2, S se expresa como $S(0.a_1a_2a_3a_4\ldots) = 0.a_2a_3a_4\ldots$, donde para los números con 2 expresiones binarias se usa la expresión finita. Sabemos que S es caótica porque para cualesquiera U y V abiertos de $[0,1]$ existe una órbita periódica que visita ambos.

Comprobarlo para los intervalos (0.101,0.102) y (0.701,0.702), encontrando un punto periódico cuya órbita pase por ambos intervalos. (Indicación: Ver la demostración en la que se ve que S es caótica).

Deduce, a partir de su expresión binaria, el periodo del punto encontrado.

Representar gráficamente la órbita del punto anterior, representando tantos puntos como indica el periodo. Comprobar que la órbita se cierra.

Representar a continuación más puntos de la órbita (por ejemplo, 10 veces el periodo).

Indicación 1: Para cambiar de base, se pueden utilizar los comandos

```
> convert(x,binary);
```

para pasar un número x a binario, y

```
> convert(x,decimal,binary);
```

para pasar un número x de binario a decimal

Indicación 2: Para comprobar si la órbita pasa por los intervalos dados, hay que pintar, junto con la órbita del punto, las proyecciones hacia arriba de los intervalos (0.101,0.102) y (0.701,0.702), y utilizar el comando "display" con el modificador "view=[a..b,c..d]" para hacer "zooms".

Ejercicio 3.3. Considérese la función tienda T. Construye un procedimiento "analisisgrafico-tienda(p,n)", adaptando "analisisgrafico" a esta función particular, para representar la órbita de un punto (no hace falta que sea animado).

Sabemos que un punto es periódico o preperiódico si y solo si es racional. Comprobarlo, representando las órbitas de los números $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{16}$. Determina si son puntos periódicos o preperiódicos y la longitud del periodo. ¿Hay alguna relación entre el denominador de la fracción y la longitud del periodo? ¿Hay más ciclos distintos para cada uno de los periodos que aparecen? ¿Cuántos? Si observas alguna otra relación o propiedad coméntala.

Ejercicio 3.4. Considérese de nuevo la función tienda T. En base 2, T se expresa como

$$T(0.a_1a_2a_3a_4\ldots) = \begin{cases} 0.a_2a_3a_4\ldots & \text{si } a_1 = 0 \\ 0.a_2^*a_3^*a_4^*\ldots & \text{si } a_1 = 1 \end{cases}$$

donde $a^* = 1 - a$ para todo $a \in \{0, 1\}$. En este caso para los números con 2 expresiones binarias se puede usar cualquiera de las 2.

Encontrar para los intervalos (0.101,0.102) y (0.701,0.702), un punto periódico cuya órbita pase por ambos intervalos. (Indicación: Ver la demostración en la que se ve que T es caótica).

¿Cual es el periodo del punto encontrado?

Representar gráficamente la órbita del punto anterior utilizando el procedimiento analisisgrafico representando tantos puntos como indica el periodo.

Representar a continuación más puntos de la órbita (por ejemplo, 10 veces el periodo).

Ejercicio 3.5. Considérese la función logística f. Sabemos que f es conjugada de T, esto es $f_4 = h \circ T \circ h^{-1}$ donde $h(t) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $h^{-1}(t) = 2\frac{\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{x})}{\pi}$.

Encontrar para los intervalos (0.101,0.102) y (0.701,0.702) un punto periódico cuya órbita pase por ambos intervalos.

¿Cual es el periodo del punto que encontrado?

Representar gráficamente la órbita del punto anterior utilizando el procedimiento analisisgrafico representando tantos puntos como indica el periodo.

Representar a continuación más puntos de la órbita (por ejemplo, 5 veces el periodo).