

## MATEMÁTICA DISCRETA

### Ejercicio 1

(30 puntos)

- Demostrar que si  $n \geq 2$  y  $n$  no es primo, entonces existe un primo  $p$  tal que  $p | n$  y  $p \nmid \phi(n)$ . Aplicar este resultado para estudiar si 899 es primo.
- Determinar los valores de  $c \in \mathbb{Z}^+$ ,  $10 < c < 20$ , para los que la ecuación diofántica  $84x + 990y = c$  tiene solución.
- Obtener todas las soluciones de la ecuación  $35x = 42$  en  $\mathbb{Z}_{49}$ .

### Ejercicio 2

(15 puntos)

En una reunión internacional hay 16 personas, 4 de cada uno de los países: España, Francia, Bélgica y Alemania. Deben elegir a 6 representantes para formar una determinada Comisión. Hallar cuántas soluciones pueden darse en cada uno de los siguientes casos:

- Todos los países deben estar representados.
- Ningún país puede tener más de dos representantes.

### Ejercicio 3

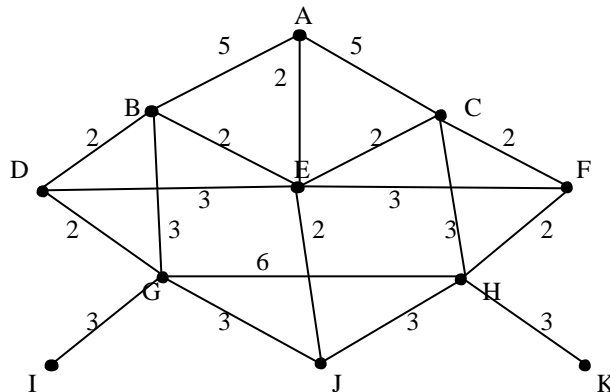
(15 puntos)

- ¿Cuántos enteros positivos podemos expresar como un producto de nueve números primos, si los números primos deben elegirse del conjunto  $\{2, 3, 5, 7, 11\}$ ?
- ¿Cuántos de estos resultados anteriores son divisibles entre cuatro?

### Ejercicio 4

(20 puntos)

La red de ordenadores de una determinada empresa puede ser representada por el siguiente grafo, donde los pesos de las aristas corresponden a la longitud de los cables, en metros:



- Desde el terminal A se quiere enviar un mensaje al terminal D por el camino mínimo. ¿Recorre este mensaje necesariamente el tramo BD? Obtener un árbol de caminos mínimos desde el terminal A al resto de los terminales.
- Se quieren renovar algunos tramos de la red, de forma que el coste de renovación sea mínimo (el coste es proporcional a la longitud del tramo) y que todo par de terminales quede conectado por un camino renovado. ¿Cuáles son los tramos a renovar?, ¿hay que renovar necesariamente el tramo BD? ¿Cuál es el coste total de la renovación?
- ¿Se puede mandar un mensaje desde el terminal K, que recorra todos los demás terminales (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J), pasando una sola vez por cada terminal? En caso afirmativo decir cuál sería el camino.

### Ejercicio 5

(20 puntos)

Sea  $G = (A, V)$  un grafo con la siguiente sucesión de grados:  $d = (4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$  del que se sabe que es un grafo simple, conexo y plano. Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas aristas tiene?. ¿Puede ser euleriano?
- ¿Puede ser un árbol?
- ¿En cuántas regiones divide al plano?
- ¿Puede ser bipartido?

**Tiempo:** Tres horas.

**Nota:** No se permite el uso de calculadoras.