

Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. (10 puntos) Demostrar que todo árbol contiene al menos dos hojas. Demostrar que todo grafo simple tiene al menos dos vértices que no son vértices-corte.
2. (8 puntos) ¿Cuántas quinielas, de 14 resultados, hay que hacer para asegurar 5 aciertos al menos?
3. (8 puntos) Construir el árbol correspondiente al código de Prüfer [5,5,3,3,4,1,1].
4. (10 puntos) a) Si  $3a \equiv 3b \pmod{m}$ , ¿es cierto que  $a \equiv b \pmod{m}$ ? Demuéstralo en caso afirmativo o pon un contraejemplo si no lo es

b) Resolver el sistema de congruencias

$$12x \equiv 18 \pmod{45}$$

$$6x \equiv 19 \pmod{25}$$

5. (10 puntos) Halla la solución general de la relación de recurrencia

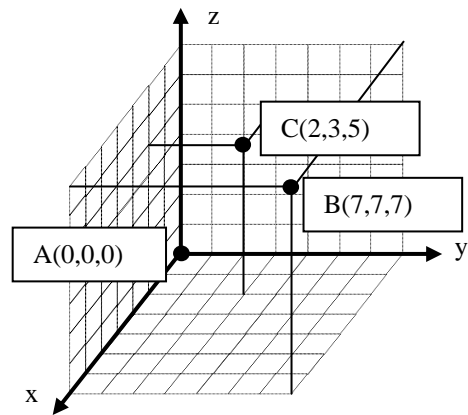
$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 2^n$$

6. (6 puntos) Se consideran las combinaciones y las variaciones de tamaño 6 del conjunto  $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$  ordenadas con el orden lexicográfico.

a) ¿Cuál es la variación siguiente a 41867? ¿Y la anterior?

b) ¿Cuál es la combinación siguiente a 235678? ¿Y la anterior?

7. (10 puntos) La retícula de la figura representa una zona aérea. Un helicóptero situado en el punto A, pretende llegar al punto B. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas de viaje son las direcciones positivas de los ejes siguiendo las líneas de la retícula, ¿cuántos caminos distintos conducen de A hasta B? ¿Y si el helicóptero tiene que repostar en C?



8. (5 puntos) Probar que si  $m > 1$  y  $a^m - 1$  es primo, entonces  $a = 2$  y  $m$  es primo.

9. (5 puntos) Hallar el resto de dividir  $140^{1221}$  entre 13.

10. (17 puntos) Si  $G = (V, A)$  es un grafo simple se llama **complementario** de  $G$  al grafo  $\bar{G} = (V, A^*)$ , que tiene los mismos vértices que  $G$  y por aristas a todos los pares de vértices que no son aristas de  $G$ . Se pide:

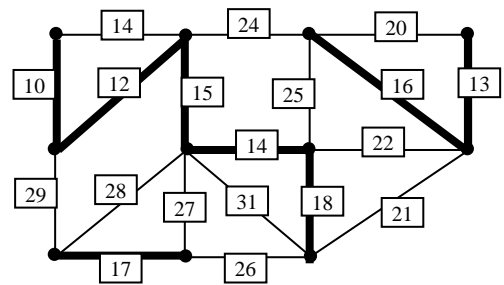
a) Si  $G$  tiene  $n$  vértices y  $q$  aristas, ¿cuántos vértices y aristas tiene su complementario?

b) Probar que si  $G$  es no conexo con al menos 2 vértices entonces  $\bar{G}$  es conexo. ¿Es cierto el recíproco?

c) Probar que si  $G$  es un grafo simple y planar con  $n$  vértices y  $q$  aristas entonces  $q \leq 3n - 6$

d) Probar que si  $G$  y  $\bar{G}$  son planares, entonces  $n < 11$ .

11. (5 puntos) En la figura aparece un grafo ponderado  $G$  (los pesos aparecen en un recuadro sobre cada arista). Las aristas en trazo grueso son las obtenidas al aplicar sucesivos pasos del algoritmo de Kruskal para construir el árbol generador mínimo de  $G$ . Indica de forma razonada, cuál será el resultado tras la siguiente iteración del algoritmo



12. (10 puntos) Obtener una expresión booleana para la función  $f(x, y, z, t)$  que toma el valor 1 en el subconjunto  $S(f) = \{(0001), (0011), (0110), (0111), (1001), (1010), (1011), (1101), (1111)\}$  de  $B^4$  y 0 en su complementario. Simplificar la expresión anterior en forma de "mínima suma de productos".

Observaciones:

- No está permitido el uso de calculadoras, ordenadores personales, ni teléfonos móviles.
- Tiempo: Tres horas.