

## MATEMÁTICA DISCRETA GRUPOS: 12M, 16T y 17T

**TIEMPO: 3 horas**

**EJERCICIO 1** (15puntos): Si  $G=(V,A)$  es un grafo simple se llama **complementario** de  $G$  al grafo  $\bar{G} = (V, A^*)$ , que tiene los mismos vértices que  $G$  y por aristas a todos los pares de vértices que no son aristas de  $G$ . Si  $e$  es el nº de aristas de  $G$  y  $n$  el nº de vértices de  $G$ . Se pide:

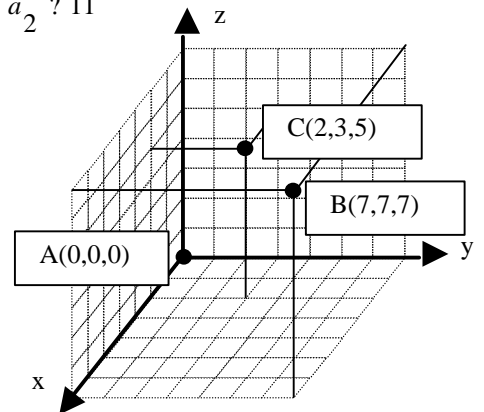
- ¿Cuántos vértices y aristas tiene  $\bar{G}$  ?
- Demostrar que si  $G$  es conexo y planar, entonces:  $e \leq 3n - 6$ .
- Probar que si  $G$  y  $\bar{G}$  son conexos y planares, entonces  $n < 11$ .

**EJERCICIO 2** (5puntos): ¿Cuántas quinielas, de 14 resultados, hay que rellenar para asegurar 5 aciertos al menos?

**EJERCICIO 3** (10puntos): Dados los conjuntos  $Z_{21}, Z_{31}, \dots, Z_{201}$ , estudia cuáles de los siguientes números son unidades simultáneamente en todos ellos:  $\{ 19, 23, \frac{20!}{2^{10}}, 20!-1, \frac{18!}{9! \cdot 10!} \}$

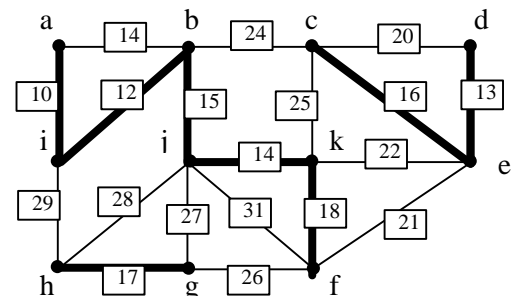
**EJERCICIO 4** (15puntos): Resolver la ecuación:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 5a_{n+1} x^{n+1} + 8a_{n+2} x^{n+2} + 4a_{n+3} x^{n+3} + 2^n$   
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 11$

**EJERCICIO 5** (10puntos): La retícula de la figura representa una zona aérea. Un helicóptero situado en el punto A pretende llegar al punto B. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas de viaje son las direcciones positivas de los ejes siguiendo las líneas de la retícula, ¿cuántos caminos distintos conducen de  $A = (0,0,0)$  hasta  $B = (7,7,7)$ ? ¿Y si el helicóptero tiene que repostar en  $C = (2,3,5)$ ?



**EJERCICIO 6** (10puntos): Halla el resto de dividir  $140^{1221}$  entre 13.

**EJERCICIO 7** (15puntos): En la figura aparece un grafo ponderado  $G$  (los pesos aparecen en un recuadro sobre cada arista). Las aristas en trazo grueso son las obtenidas al aplicar sucesivos pasos del algoritmo de Kruskal para construir el árbol generador mínimo de  $G$ . Indica en el dibujo de la derecha y de forma razonada, cuál será el resultado tras la siguiente iteración del algoritmo. Calcula los caminos más cortos desde "a" a los vértices que disten de "a" menos de 45.



**EJERCICIO 8** (10puntos): Obten una expresión booleana para la función  $f(x, y, z, t)$  que toma el valor 1 en el subconjunto  $S(f) = \{ (0001), (0011), (0110), (0111), (1001), (1010), (1011), (1101), (1111) \}$  de  $\{0,1\}^4$  y 0 en su complementario. Simplificar la expresión anterior en forma de "mínima suma de productos".

**EJERCICIO 9** (10puntos): Un grafo  $G$  conexo tiene la siguiente sucesión gráfica  $d=(5,4,4,3,3,3,2,2,2)$ .

- Si  $G$  es planar, ¿cuántas caras tiene?, ¿es un grafo euleriano?
- Si  $G$  es bipartido, ¿cuál es su número cromático?, ¿es un grafo hamiltoniano?

**Observaciones:**

- ?? Sólo se valorarán aquellas respuestas que utilicen los métodos desarrollados en la asignatura de Matemática Discreta.
- ?? No está permitido el uso de calculadoras, ordenadores personales, ni teléfonos móviles.