

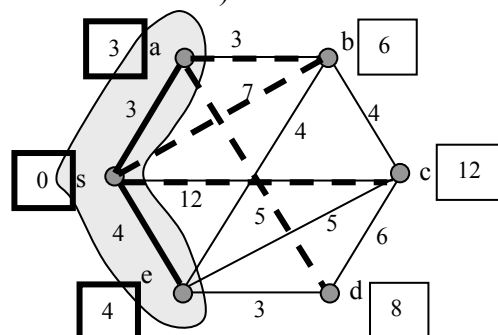
## MATEMÁTICA DISCRETA ( GRUPOS 11 M y 13 M )

TIEMPO: 3 horas

**Contesta a las siguientes cuestiones, razonando o justificando todas las respuestas.**

1. ¿Cuántos subgrafos de  $K_n$ ,  $n \geq 4$ , son isomorfos a  $K_{1,3}$ ?
2. Define grafo regular y arista puente. Demuestra que todo grafo simple y regular de grado par no puede tener ninguna arista puente.
3. Se considera la sucesión [4,4,3,3,3,3]. ¿Es una sucesión gráfica? En caso afirmativo, construye dos grafos simples, uno planar y otro no planar, que la tengan como sucesión de grados. ¿Existe un grafo bipartido con esta sucesión?
4. (a) Enuncia la condición necesaria y suficiente para que la ecuación  $ax \equiv b \pmod{m}$  tenga solución. En este caso, demuestra cuántas soluciones enteras no congruentes tiene.  
(b) ¿Cuántas soluciones enteras no congruentes tiene la ecuación  $4006x \equiv 6009 \pmod{10015}$ ?
5. Halla la solución general de la relación de recurrencia  $a_{n+2} + 6a_{n+1} + 9a_n = 2(-5)^n$
6. ¿Cuántos números de 6 cifras, sin ceros a la izquierda, hay que tengan dos o más 3?
7. ¿Cuál es el inverso de  $2003^{99}$  en  $Z_{101}$ ?
8. Halla el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación
 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 39 \\ 3 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 12, \quad 0 \leq x_4 \end{cases}$$
9. Calcula el resto de la división de  $1! + 2! + 3! + \dots + n!$  entre 10,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
10. En el grafo ponderado de la figura se están calculando, por el algoritmo de Dijkstra, las distancias desde  $s$  a cada uno de los restantes vértices del grafo. Los vértices  $s$ ,  $a$  y  $e$  han alcanzado su etiqueta definitiva (enmarcada en trazo grueso), mientras que en el resto de vértices aparece su etiqueta provisional (enmarcada en trazo fino).

- (a) ¿Qué etiquetas cambian en el siguiente paso?
- (b) ¿Cuál es el siguiente vértice en alcanzar etiqueta definitiva?



11. Un árbol con raíz  $T = (V, A)$  posee 10 vértices de grado 5, 8 vértices de grado 4, 12 vértices de grado 3, 10 vértices de grado 2 y no posee vértices de grado superior a 5, ¿cuántas hojas posee?
12. Sea  $A$  un álgebra de Boole,  $a, b, c \in A$ . Simplificar la expresión  $(a+b)(a'+c)(b+c)$ . Obtener dicha simplificación aplicando las propiedades de las álgebras de Boole, indicando en cada paso la propiedad utilizada.

**Puntuación:** 1) 5 pts., 2) 10 pts., 3) 10 pts., 4) 10 pts., 5) 10 pts., 6) 10 pts.,  
7) 5 pts., 8) 10 pts., 9) 5 pts., 10) 10 pts., 11) 5 pts., 12) 10 pts.

### Observaciones:

- Sólo se valorarán aquellas respuestas que utilicen los métodos desarrollados en la asignatura de Matemática Discreta.
- No está permitido el uso de calculadoras, ordenadores personales, ni teléfonos móviles.