3.- RELACIONES DE RECURRENCIA

1) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:
   a) $a_n = 4\, a_{n-1} - 4\, a_{n-2}$ $\quad n \geq 2,\quad a_0 = 6,\ a_1 = 8.$
   b) $a_n = 7\, a_{n-1} - 10\, a_{n-2}$ $\quad n \geq 2,\quad a_0 = 2,\ a_1 = 1.$
   c) $a_n = 2\, a_{n-1} - a_{n-2}$ $\quad n \geq 2,\quad a_0 = 4,\ a_1 = 1.$
   d) $a_{n+2} = -4\, a_{n+1} + 5\, a_n$ $\quad n \geq 0,\quad a_0 = 2,\ a_1 = 8.$
   e) $a_n = 6\, a_{n-1} - 11\, a_{n-2} + 6\, a_{n-3}$ $\quad n \geq 3,\quad a_0 = 2,\ a_1 = 5,\ a_2 = 15.$
   f) $a_n = 5\, a_{n-1} - 6\, a_{n-2}$ $\quad n \geq 2,\quad a_0 = 1,\ a_1 = 0.$

2) Sea a_n el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos {0, 1}, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

3) Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

4) Sean n rectas trazadas en el plano de manera que cada recta corte a las restantes, pero que no haya tres coincidentes. Para cada $n \geq 0$, sea a_n el nº de regiones en que las n rectas dividen al plano y sea b_n el número de regiones infinitas
   a) Encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.
   b) Encuentra una relación de recurrencia para calcular b_n y resuélvela.

5) Problema de las Torres de Hanoi (Édouard Lucas): Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

6) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_n - a_{n-1} = 3n^2 \\ a_0 = 7 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} = 7^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} = 3^n 5 \\ a_0 = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2 \\ a_0 = 11,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n \\ a_0 = 1, a_1 = 3 \end{cases}$

7) Sea M = {A, B, C} y sea S_n el conjunto de cadenas de longitud n formadas con las letras de M que tienen un número par de letras A consecutivas. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

8) Halla una ecuación de recurrencia que genere la siguiente sucesión: { 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169,...} y resuelve dicha ecuación, obteniendo en función de n, el término general A_n de la sucesión.

9) Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1 cm., 2 cm., y 4 cm., y se quiere construir una torre apilando cubos. Sea T_n el número de formas distintas de construir una torre de altura n cms. Encuentra una relación de recurrencia para hallar T_n y resuélvela.

10) Sea $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$.

Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det A_n$ y resuélvela.