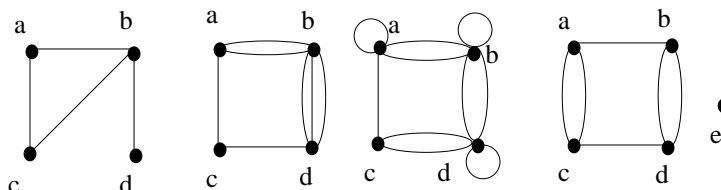


4.- GRAFOS

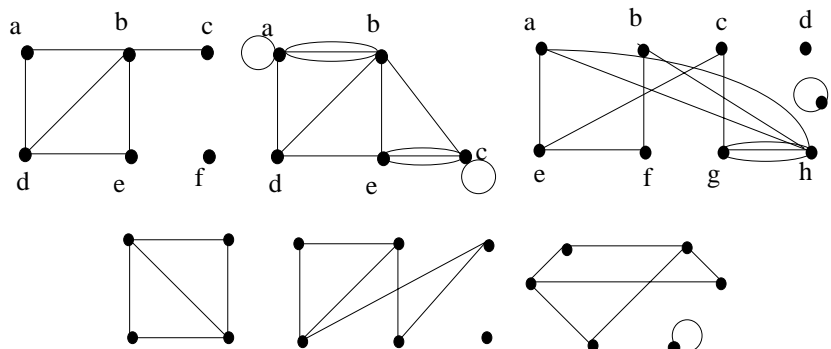
NOCIONES BÁSICAS. GRADO. MATRICES

1) Dibuja un grafo que represente las rutas aéreas diarias de una compañía que ofrece los siguientes vuelos: Todos los días hay cuatro vuelos que unen Boston y Nueva York, dos Nueva York y Miami, uno entre Miami y Madrid, cuatro Madrid y Barcelona, uno Barcelona-Boston uno Madrid-Nueva York y uno Barcelona-Nueva York

2) Estudia cuáles de los siguientes grafos son simples. Para los grafos no simples ¿cuál es el mínimo número de aristas que se pueden quitar para hacerlos simples?

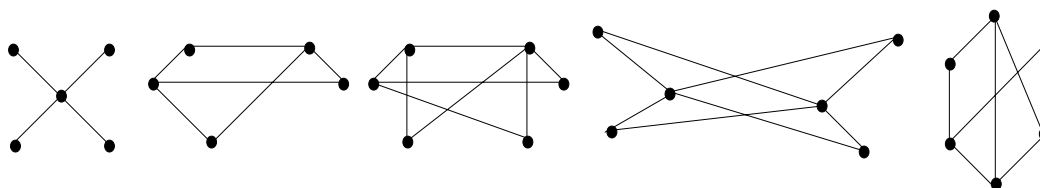


3) Para cada uno de los siguientes grafos, obtén la lista de adyacencia y la matriz de adyacencia y encuentra el número de vértices, el número de arcos y el grado de cada vértice.



4) ¿Pueden los 15 vértices de un grafo simple tener grado 5?

5) Determina cuales de los siguientes grafos son bipartidos:



6) ¿Cuántas aristas tiene un grafo simple si sus vértices tienen los siguientes grados 4, 3, 3, 2, 2? Dibújalo.

7) Estudia si existe un grafo simple con 5 vértices y con los siguientes grados:

- a) 3, 3, 3, 3, 2 b) 1, 2, 3, 4, 5 c) 1, 2, 3, 4, 4 d) 3, 4, 3, 4, 3 e) 0, 1, 2, 2, 3 f) 1, 1, 1, 1, 1

8) a) Si G es un grafo con 25 aristas y el grado de cada vértice es, al menos, cuatro, ¿cuál es el máximo número de vértices que puede tener G ?

b) Si G es un grafo simple con 52 aristas, ¿cuál es el menor número de vértices que puede tener G ?

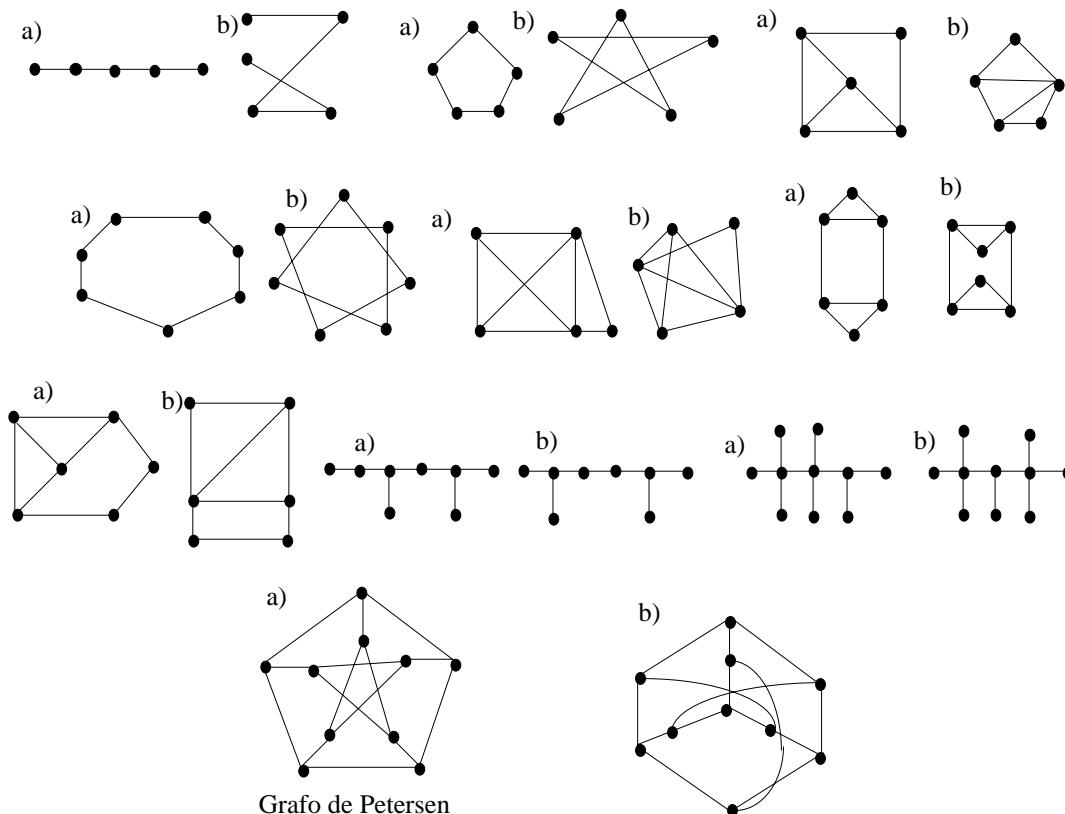
9) Representa la matriz de adyacencia de cada uno de los siguientes grafos:

- a) K_4 b) $K_{1,4}$ c) $K_{2,3}$ d) C_4 e) W_4 f) Q_3 g) K_n h) $K_{m,n}$ i) C_n j) W_n k) Q_n

10) Dada la matriz de adyacencia de un grafo G de 5 vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, halla la sucesión de los grados de los vértices y el número de aristas del grafo G.

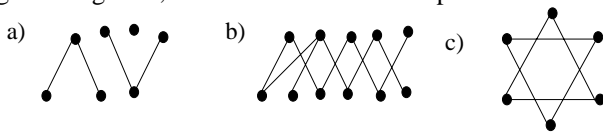
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11) Determina cuáles de los siguientes pares de grafos son isomorfos:

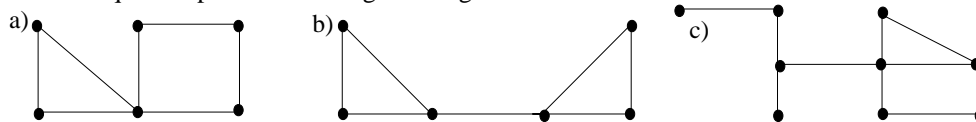


CONEXIÓN. ALGORITMOS DE BÚSQUEDA

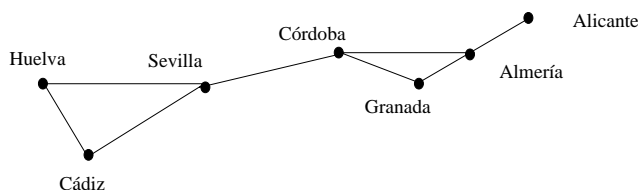
1) Estudia si son conexos los siguientes grafos, dando el número de componentes conexas de cada uno:



2) Encuentra las aristas que son puente en los siguientes grafos:



3) Se quiere duplicar los tramos de una red de comunicación que, en caso de deteriorarse, imposibilitarían la comunicación entre ciertos puntos. ¿Cuales son los tramos que deben duplicarse?



4) Para los grafos dados por las siguientes listas de adyacencias, hallar un árbol BEP. Utilizar el método BEA para responder si son conexos.

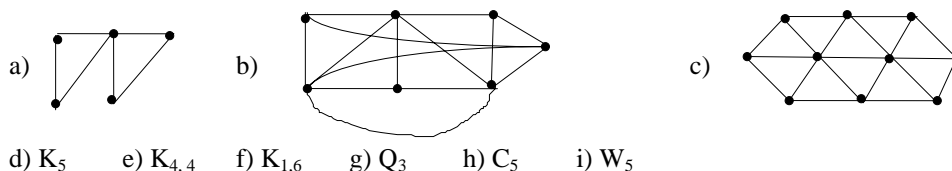
	a	b	c	d	e	f	g	h
b		a	b	a	b	g	c	a
d	c	d	b			f	g	
h	d	g	c				h	
e								

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
e	d	e	b	a	c	b	b	a	
i	g	f	g	c	e	d	d	c	
h	i	h	f	i				f	

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	3	0	1	11	0	11	0	1	10	9	4	1	0	4
5	8	5	12	14	2	14	5		12	12	6	3	2	6
7		13			7		13			14	9	5	11	
					13						10	7		

ÁRBOLES Y CAMINOS MÍNIMOS

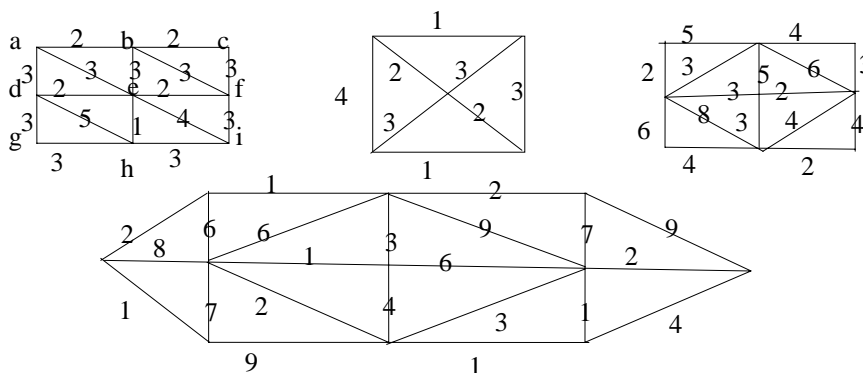
1) Hallar un árbol generador para cada uno de los siguientes grafos:



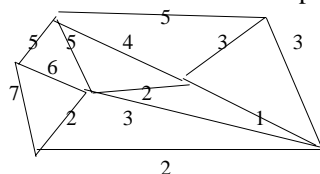
2) Se va a construir un sistema de carreteras que comunique estas 5 ciudades. Determina las carreteras que deberán construirse para que el costo de construcción sea mínimo.

	Montilla	Cabra	Monturque	Aguilar
Cabra	14	-	-	-
Monturque	38	12	-	-
Aguilar	10	35	13	-
Lucena	26	9	18	28

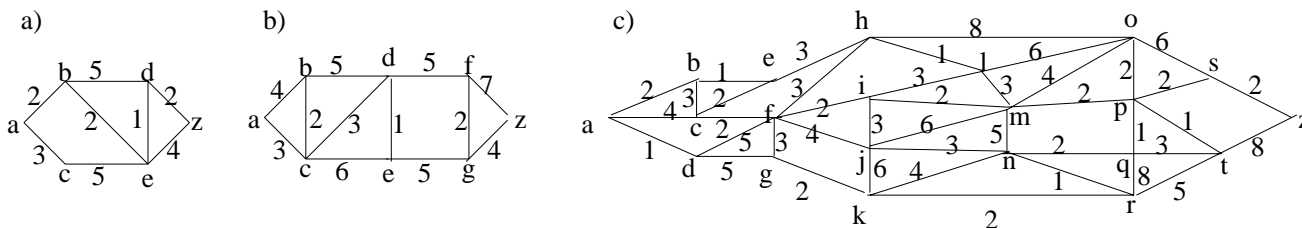
3) Determina un árbol generador mínimo de cada uno de los grafos siguientes:



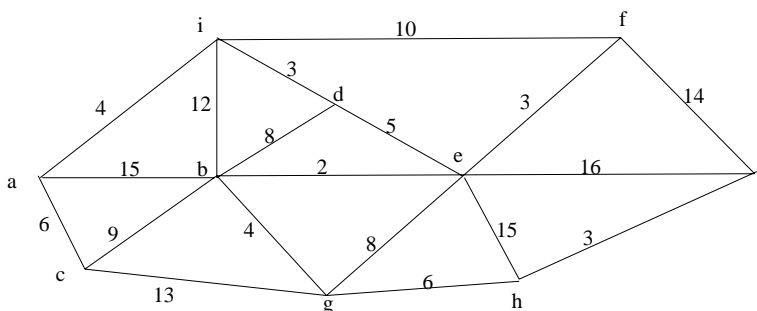
4) En el grafo de la figura se muestra una red de ordenadores que se quiere construir, los vértices representan los ordenadores y las aristas las líneas de transmisión a considerar para conectar algunos pares de ellos. Cada arista tiene un peso que indica el coste de construir esa línea específica. Conecta todos los ordenadores con el menor coste posible.



5) Obtén el camino más corto entre a y z, para los siguientes grafos. ¿Cuál es la longitud en cada caso?



6) En el grafo de la figura se muestra una red ferroviaria donde la distancia entre cada par de ciudades se expresa en Km.:



- a) Averigua cuál es el camino más corto para viajar de “a” a “z”.
- b) Se quiere renovar parte de la red ferroviaria de manera que el coste en km. sea mínimo y que cada par de ciudades tengan conexión por tramos renovados. ¿Cuáles son los tramos que hay que renovar?

7) a) Halla la ruta más corta desde A a cada uno de los restantes vértices del grafo ponderado G que especifica la tabla siguiente:

	B	C	D	E	F	H
A	4		5			
B		4		5		6
C						4
D					4	8
E						6
F						9

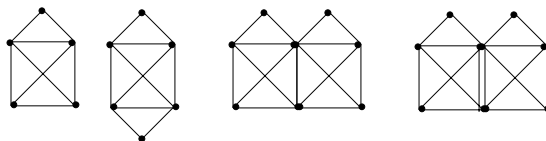
b) El conjunto de caminos construidos en el apartado anterior, ¿constituye un árbol generador de G?, ¿es siempre un árbol generador mínimo?. Justifica las respuestas.

8) Se quiere construir un ferrocarril metropolitano que conecte 8 barrios de la capital: {A, B, C, D, E, F, G, H}. La duración estimada del viaje directo entre cada dos de los barrios viene dada por la tabla adjunta. ¿Qué estaciones han de conectarse para que la red tenga el menor número de conexiones posibles, de forma que la duración del viaje entre el barrio A y cualquier otro barrio sea lo más corto posible?

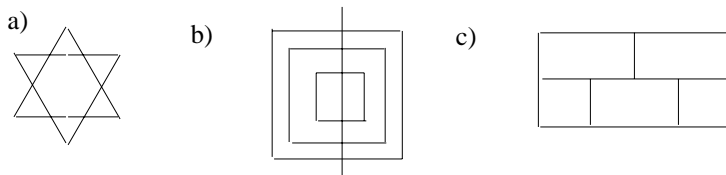
	B	C	D	E	F	G	H
A	3	5	2	6	3	4	2
B		5	4	6	8	3	2
C			1	4	3	8	2
D				4	2	1	4
E					3	5	1
F						2	4
G							3

GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS

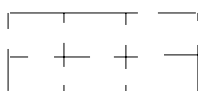
1) Estudia si existe un camino euleriano en cada uno de los siguientes grafos. ¿Son grafos eulerianos?:



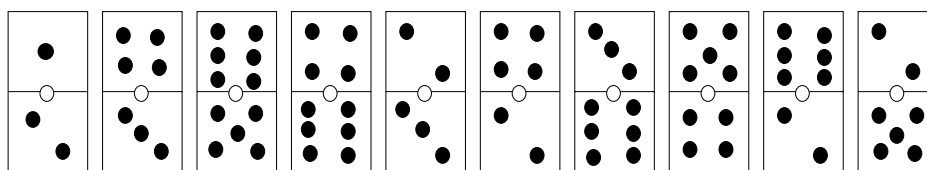
2)Cuál es el mínimo número de veces que hay que levantar el lápiz del papel para trazar los siguientes dibujos?



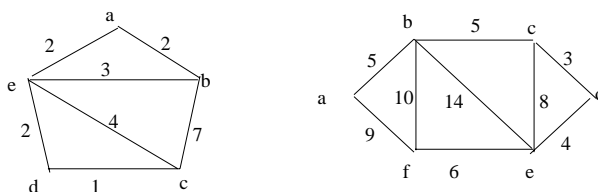
3) En la casa de la figura ¿Es posible entrar y salir de tal manera que cada puerta se use exactamente una vez?



- 4) a) Sabiendo que un grafo completo con bucles es aquel que tiene un único arco de extremos u, v para todo par de vértices del grafo ¿Para qué valores de n el grafo completo con bucles de n vértices es un grafo euleriano?
 b) Demuestra que en el juego del Dominó hay partidas que emplean todas las fichas. (Indicación: emplear a)
 c) Estudiar si en una partida de dominó las 10 fichas siguientes pueden aparecer las primeras.

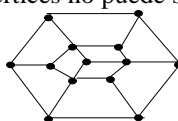


5) (Problema chino del cartero, Kwan,1962):Un cartero sale de correos con las cartas, recorre las calles de su zona y vuelve a la central. Debe minimizar la distancia recorrida. Resuelve este problema si las calles que debe recorrer son las representadas en los siguientes grafos:



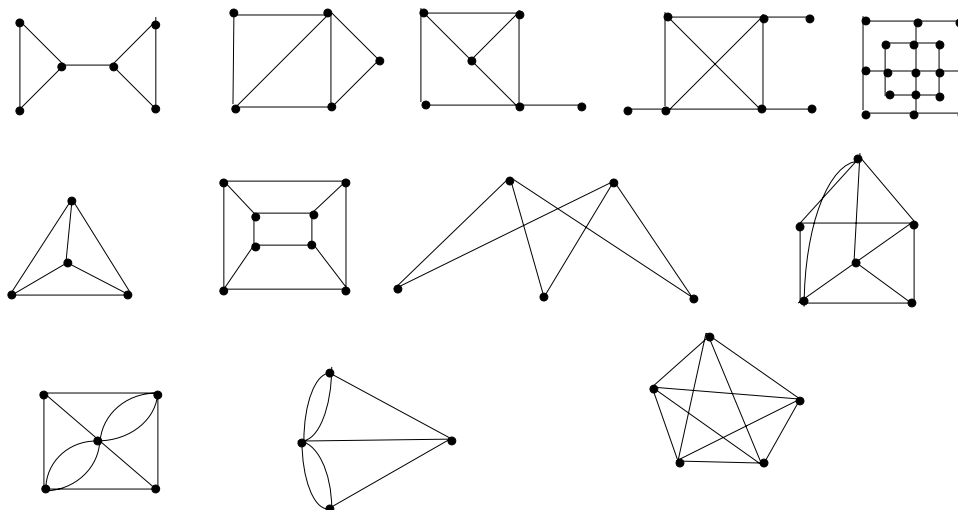
- 6) ¿Cuáles de los siguientes grafos son hamiltonianos?
 a) el grafo completo K_n .
 b) El grafo completo bipartido $K_{r,s}$
 c) grafo de Petersen
 d) grafos del tetraedro, cubo y octaedro.

7) Usa que un grafo bipartido con un n° impar de vértices no puede ser hamiltoniano, para demostrar que:



- a) El siguiente grafo no puede ser hamiltoniano.
 b) Un caballo de ajedrez, no puede recorrer todas las casillas sin repetir ninguna, en un tablero 5×5 ó 7×7 .

8) En cada uno de los siguientes grafos, estudia si existe: un camino E. cerrado, un ciclo H., un camino E. no cerrado y un camino H. no cerrado.

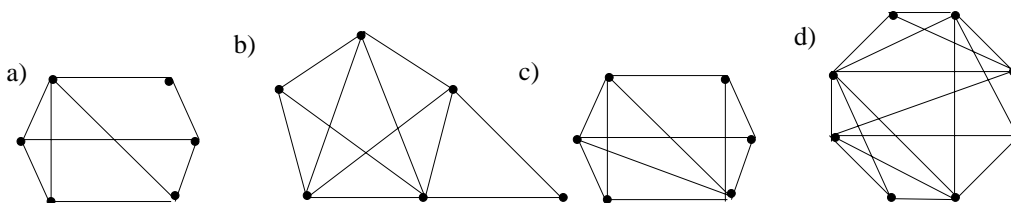


9) Elena y Dora invitan a 10 amigos a cenar. En el grupo de 12, todos conocen al menos a 6 personas. Demuestra que se pueden sentar los 12, alrededor de una mesa circular, de modo que todos conozcan a las dos personas que están sentadas a su lado.

- 10) a) Demuestra que en K_7 hay 3 ciclos H. con todas sus aristas distintas.
 b) Demuestra que K_n ($n \geq 3$, n impar) hay $(n-1)/2$ ciclos H. con todas sus aristas distintas.
 c) Siete personas que asisten a un congreso deberán comer juntas, en una mesa circular, los tres días que dura el congreso. Para conocerse mejor deciden sentarse de modo que cada persona tenga a cada lado a una persona distinta cada día. ¿Pueden llevar a cabo su propósito? ¿Y si el congreso durara 5 días?

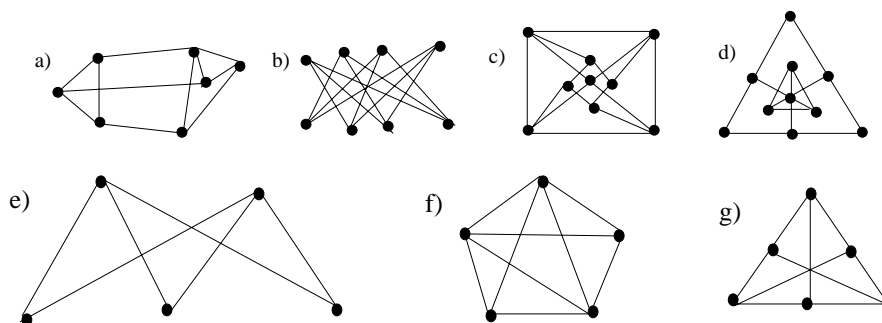
PLANARIDAD

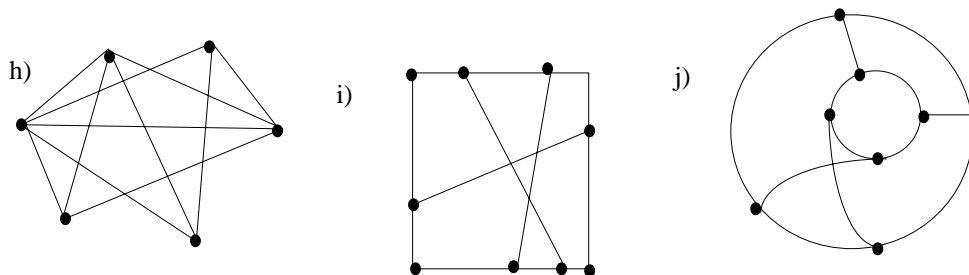
1) Demuestra que son planares los siguientes grafos y comprueba la fórmula de Euler.



- 2) a) ¿Para qué valores de n el grafo completo K_n es planar?
 b) ¿Para qué valores de r y s (con $r \leq s$) el grafo bipartido completo $K_{r,s}$ es planar?

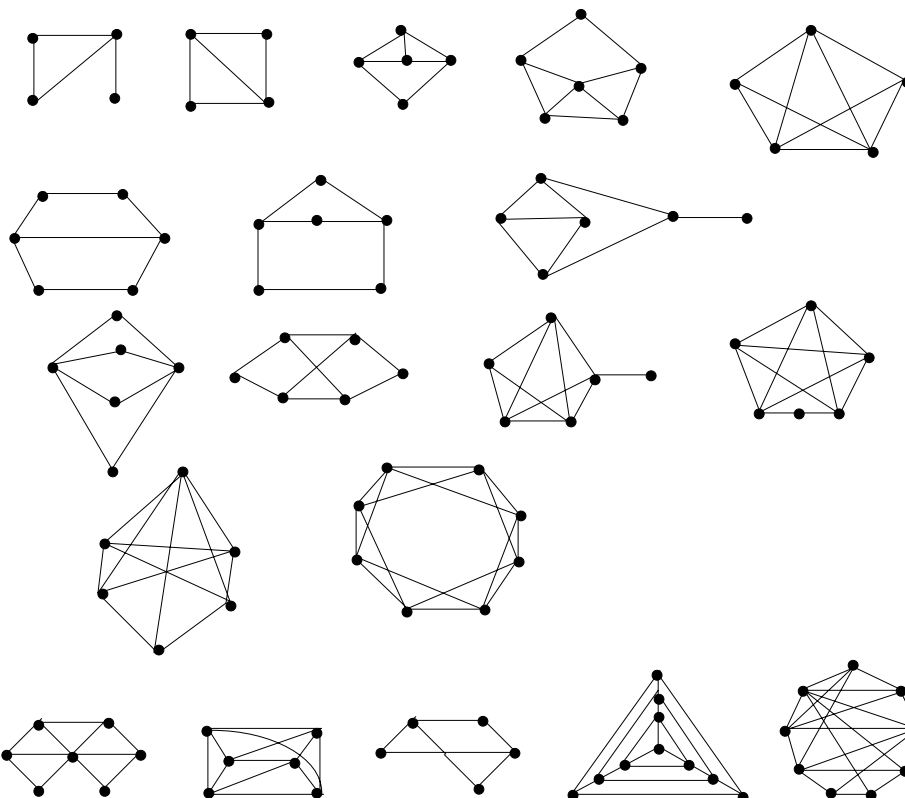
3) Estudia si son planares los siguientes grafos. En caso afirmativo, da una representación plana y comprueba la fórmula de Euler. En caso negativo razona porqué no lo son:



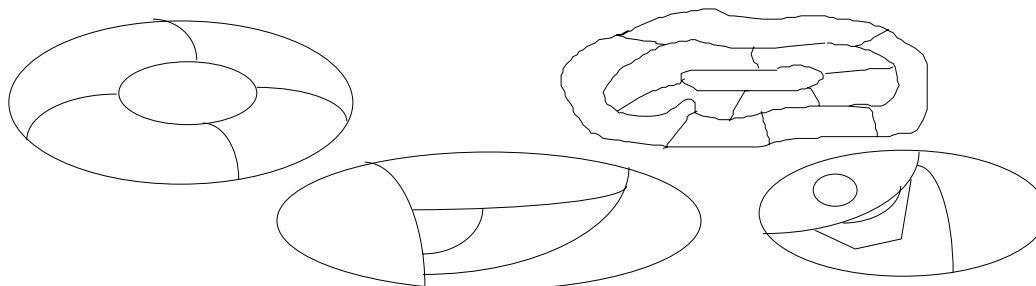


COLORACIÓN

1) Encuentra el número cromático de los siguientes grafos:



2) Utiliza la teoría de grafos para colorear los siguientes mapas con el mínimo nº de colores posible:



3) El jefe de una escuela tiene que programar las fechas de los exámenes finales correspondientes a 7 asignaturas, que designaremos por $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ y A_7 , de modo que a ningún estudiante le coincidan dos exámenes el mismo día. Se sabe que los siguientes pares de asignaturas tienen estudiantes en común:

- $\{A_1, A_2\}, \{A_1, A_3\}, \{A_1, A_4\}, \{A_1, A_7\}, \{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_2, A_5\}, \{A_2, A_7\}, \{A_3, A_4\}, \{A_3, A_6\}, \{A_3, A_7\}, \{A_4, A_5\}, \{A_4, A_6\}, \{A_5, A_6\}, \{A_5, A_7\}$ y $\{A_6, A_7\}$.

Dibuja un grafo que modelice el problema de programación de las fechas de los exámenes. ¿Cuál es el mínimo número de días necesarios para realizar todos los exámenes de modo que ningún estudiante tenga dos exámenes el mismo día?

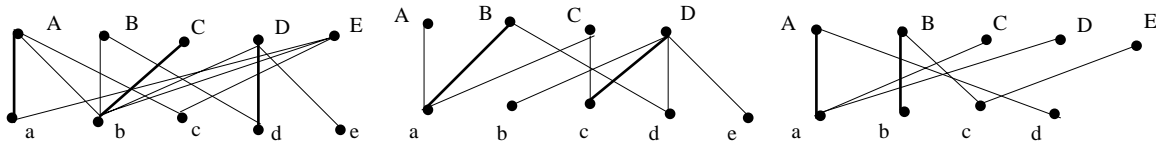
4) Los comités de dirección de cierta empresa son seis y se componen de las siguientes personas:

$$C_1 = \{P_1, P_2, P_3\}, C_2 = \{P_2, P_4, P_5\}, C_3 = \{P_1, P_5, P_3\}, C_4 = \{P_4, P_5, P_3\}, C_5 = \{P_1, P_2\}, C_6 = \{P_2, P_5, P_3\}.$$

Si cada comité se reúne una vez al mes ¿cuál es el mínimo nº de días necesarios para que se reúnan todos los comités de manera que nadie tenga dos citaciones para el mismo día?

EMPAREJAMIENTOS

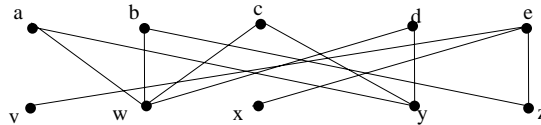
1) Partiendo del emparejamiento señalado, aplica el método de los caminos alternados para hallar un emparejamiento máximo, en cada uno de los siguientes grafos:



2) En una consulta de urgencias hay 5 médicos y 5 enfermeros. Se quieren planificar las vacaciones de forma que siempre queden de guardia un médico y un enfermero.

a) ¿Pueden hacerse 5 parejas distintas respetando las preferencias que se indican en la figura?

b) ¿Cuál es el mayor número de parejas que pueden hacerse respetando las preferencias $M = \{aw, bz, cy, ev\}$?



3) Sea G el grafo del ejercicio anterior, y sea $M = \{cw, dy, ez\}$ un emparejamiento. Hallar un camino alternado para M que empiece en b y utilizarlo para construir un emparejamiento M' con $|M'| = 4$.

Comprueba que no hay ningún camino alternado para M' . ¿Es M' un emparejamiento máximo?

4) Supongamos que cada elemento de un conjunto de 10 personas tiene una lista de 4 libros que desea tomar prestados de la biblioteca. Supongamos también que cada libro aparece en 4 listas exactamente. Demostrar que todos ellos pueden tomar prestado un libro de su lista al mismo tiempo.

5) Sea $G = (X \cup Y, A)$ un grafo bipartido con $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{v, w, x, y, z\}$ y $A = \{av, ax, bv, bz, cw, cy, cz, dy, dz, ez\}$. Encuentra un emparejamiento completo en G empezando por el emparejamiento $M = \{av, bz, cy\}$.

6) Seis departamentos de cierta empresa tienen a las siguientes personas como posibles candidatos para secretarios:

$$A = \{a, b, l, e\}, B = \{l, e, s, t\}, C = \{s, t, a, b\}, D = \{s, a, l, e\}, E = \{t, a, l, e\}, F = \{s, a, l, t\}.$$

Se hace en principio la siguiente distribución: al departamento A se le asigna a , al B se le asigna t , al C se le asigna s y al D se le asigna l .

a) Obtén, a partir de esta distribución, una distribución completa.

b) ¿Se puede asignar a cada departamento un secretario distinto de forma que los tres primeros estén representados por e, l y s respectivamente?

7) Demuestra que si los departamentos del ejercicio anterior, tienen como posibles candidatos

$$A = \{m, a\}, B = \{e, r, a\}, C = \{m, a, r, e\}, D = \{m, a, s, t, e, r\}, E = \{m, e\}, F = \{r, a, m\}$$

no es posible asignar un secretario distinto a cada departamento.

8) Se tienen cinco comisiones $C_1 = \{a, c, e\}$, $C_2 = \{b, c\}$, $C_3 = \{a, b, d\}$, $C_4 = \{d, e, f\}$, $C_5 = \{e, f\}$. Cada comisión ha de enviar un representante al Congreso Anual de Comisiones; C_1 quiere nombrar a e , C_2 quiere nombrar a b , C_3 quiere nombrar a a y C_4 quiere nombrar a f .

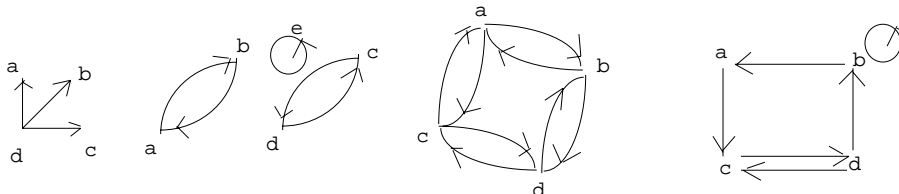
a) Demuestra que no es posible respetar los deseos de C_1, C_2, C_3 y C_4 .

b) Usa el método del camino alternado para hallar una lista de representantes todos distintos.

c) ¿Es posible construir un sistema completo de representantes distintos si la comisión C_1 se niega a cambiar su nominación?

DIGRAFOS

1) Calcula la matriz de adyacencia de los siguientes digrafos:

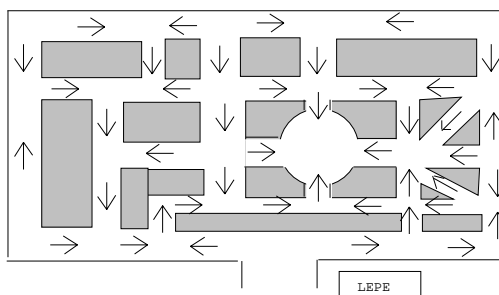


2) Halla la matriz de accesibilidad de los digrafos del ejercicio 1.

3) Así quedó el mapa de Lepe después de que el alcalde decidiera darle sentido único a todas las calles.

a) ¿Qué le ocurre a cualquiera que circule por Lepe?

b) Ayuda al alcalde de Lepe a orientar las calles, de manera que desde cualquier punto se pueda acceder a cualquier otro



4) Utiliza un árbol de decisión ternario para encontrar en un conjunto de 12 monedas, una moneda falsa que pesa más que las restantes.

5) En un campeonato en el que participaban nueve equipos se han obtenido los resultados indicados en la tabla, en la cual, aparece un + en el lugar (i, j) si el equipo i ha ganado al equipo j, y aparece un - en caso contrario, (no puede darse un empate).

i\j	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+	+	-	-	+	-	+	-
2		-	+	+	-	+	-	-
3			+	-	-	+	-	+
4				+	-	-	+	-
5					-	+	-	-
6						+	-	-
7							+	+
8								-

- a) Dibuja el digrafo completo con nueve vértices, en el que una arista va de i a j si el equipo i ha ganado al equipo j
- b) Construye un camino dirigido, que contenga todos los vértices del digrafo, y tal que cada vértice haya ganado al siguiente en el camino.

OTROS EJERCICIOS

1) Para decidir si te contratan en PUFOSA como responsable de informática, debes realizar un informe razonado respondiendo a los problemas que tienen planteados en la empresa.

La plantilla de la empresa consta de 25 miembros. Diez de ellos trabajan en el departamento de ventas, v_1, \dots, v_{10} ; siete en el de servicios, s_1, \dots, s_7 ; siete en el de proyectos, p_1, \dots, p_7 , y dirige todo un director general d. Los empleados v_1, s_1 y p_1 son los directores de sus respectivos departamentos.

Cada empleado dispone de un ordenador, estando éstos conectados en red del siguiente modo: El director general está conectado a cada uno de los directores de departamento con cables de longitud uno. Los empleados de cada departamento están conectados entre sí según las tablas siguientes, en las que se indica la longitud de los cables de conexión:

	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
p_1	5				4	3
p_2		3	4	5	6	1
p_3			2			
p_5			2		3	5

	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
s_1	3		2		4	
s_2		2		7		3
s_3			6		1	
s_4				4		4
s_5					5	
s_6						2

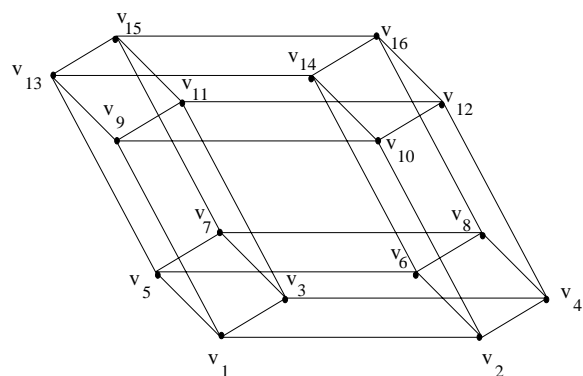
	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}
v_1			3			2			
v_2			4			1			
v_4				2	6		2		
v_5		1						2	
v_6						3		4	3
v_7							7		

Los problemas son:

- ¿Puede cada empleado comunicarse, a través de la red, con cualquier otro miembro de la empresa?
- ¿Podría un mensaje recorrer todos los cables de la red sin pasar dos veces por el mismo tramo?
- ¿Puede dibujarse en un plano un esquema de la red del departamento de servicios se forma que no se corten entre sí las líneas que representan los cables?
- En el departamento de servicios, ¿podría su director enviar un mensaje a todos los empleados de forma que pase de un empleado a otro sucesivamente y vuelva a él, sin que pase dos veces por el mismo empleado?
- Halla los itinerarios más cortos entre el director del departamento de proyectos y cada uno de sus miembros.
- Averigua si en el departamento de ventas es posible que sus miembros trabajen por parejas, de forma que no sobre nadie y que trabajen juntas personas cuyos ordenadores están conectados directamente. (¡El jefe también trabaja!).
- ¿Cuál es el mínimo número de turnos de vacaciones necesario en el departamento de ventas, si no pueden tomar vacaciones, simultáneamente, personas que tengan sus ordenadores directamente conectados?
- ¿Cuántos metros de cable podemos ahorrar suprimiendo conexiones de forma que no perdamos conectividad en la red?

2) Sea G el grafo de la figura

- Estudiar razonadamente si G es Euleriano.
- Estudiar si G es Hamiltoniano.
- Obtener el número cromático de G.



d) Supongamos que $A = \{v_1, v_4, v_6, v_7, v_{10}, v_{11}, v_{13}, v_{16}\}$ representa un conjunto de 8 profesores y $B = \{v_2, v_3, v_5, v_8, v_9, v_{12}, v_{14}, v_{15}\}$ un conjunto de 8 alumnos y supongamos que un vértice de A y otro de B son adyacentes si el alumno correspondiente puede asistir a las tutorías del profesor.

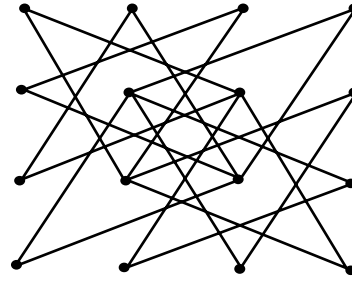
Suponiendo que un profesor sólo puede atender a un alumno cada vez, razona, dando una justificación en términos de grafos, si todos los alumnos pueden ser atendidos simultáneamente.

e) Estudia el mismo problema anterior suponiendo que hay que respetar las preferencias siguientes:

- $\{v_2v_1, v_2v_4, v_5v_6, v_5v_7, v_3v_1, v_3v_4, v_8v_{16}, v_9v_1, v_9v_{10}, v_{12}v_{10}, v_{14}v_{10}, v_{14}v_{13}, v_{15}v_{16}\}$

3) Se considera el grafo G de la figura. Se pide:

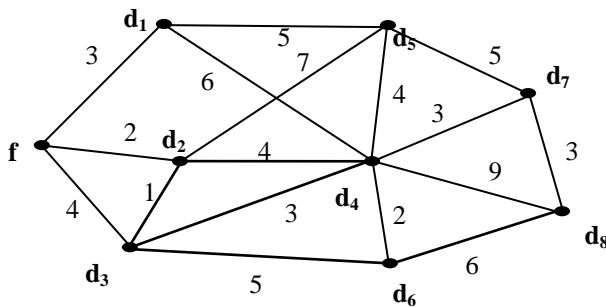
- a) ¿Es G bipartido?
- b) ¿Es euleriano?
- c) ¿Es hamiltoniano?
- d) ¿Cuál es su número cromático?
- e) ¿Es planar?



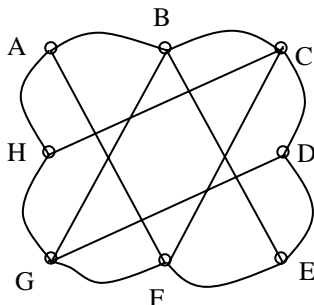
4) a) En una empresa química se fabrican 8 productos: A, B, C, D, E, F, G y H. Algunos de esos productos reaccionan violentamente al mezclarse con otros por lo que es obligatorio almacenarlos en diferentes dependencias. Si la tabla adjunta informa de las sustancias cuya mezcla es potencialmente peligrosa, ¿cuál es el mínimo n° de dependencias que se necesitan?

	A	B	C	D	E	F	G	H
B	√		√	√	√			
C				√	√	√	√	
D					√	√		
E						√	√	√
F							√	√
G								√

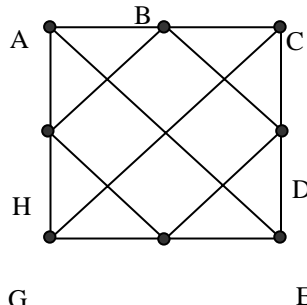
b) La red de distribución de la empresa está formada por 8 centros de almacenamiento y distribución, $\{d_1, d_2, \dots, d_8\}$. Estos centros están conectados con la fábrica a través de una red de carreteras según indica el grafo adjunto. (Las longitudes de los diferentes tramos de esa red aparecen expresadas en decenas de kilómetros). Halla el itinerario de longitud mínima que conecta la fábrica con cada centro de distribución.



5) Un departamento de una empresa tiene establecidas dos redes locales de comunicación distintas entre sus ocho terminales. Las líneas de conexión de cada red están esquematizadas en los siguientes grafos:



Red I



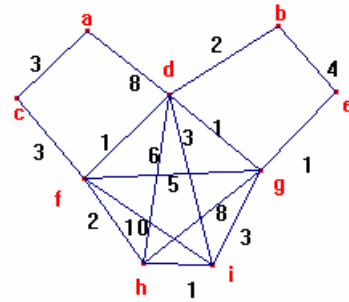
Red II

- a) Analiza si los grafos que representan las redes I y II son isomorfos.
- b) En el grafo de la red I, ¿se pueden conectar los terminales evitando que haya superposición de las líneas de conexión?. ¿Y en el grafo de la red II?

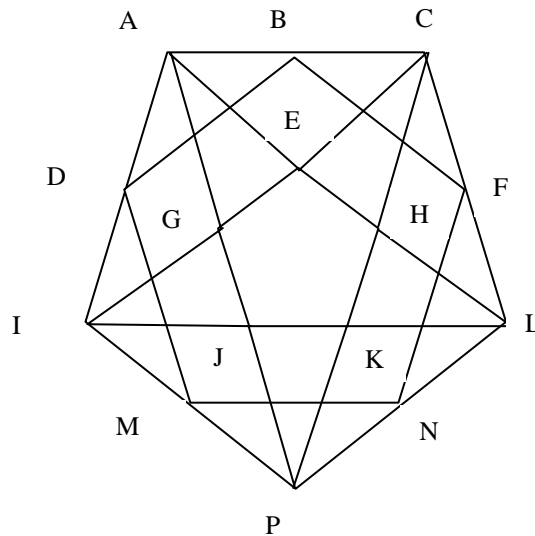
- c) Como el coste es demasiado elevado se decide reparar lo mínimo necesario para que los ordenadores A y H queden conectados por tramos renovados, ¿cuáles serán los tramos que hay que reparar?
- d) ¿Cuál es el mínimo número de turnos de vacaciones de verano que hay que establecer, si no pueden tomar vacaciones simultáneamente, personas que tengan sus ordenadores directamente conectados?
- e) ¿Es posible que todos los empleados trabajen por parejas, de forma que trabajen juntas personas cuyos ordenadores estén conectados directamente? En caso afirmativo, hallar un emparejamiento.

8) Se considera el grafo G cuyo conjunto de vértices es $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ y cuyas aristas con sus pesos correspondientes vienen dados por la siguiente figura:

- a) ¿Existe un camino euleriano en G ?
- b) ¿Existe un camino hamiltoniano en G ?
- c) ¿Cuál es el número cromático de G ?
- d) Halla la ruta más corta desde el vértice a a cada uno de los restantes vértices.



9) Se considera el grafo G cuyo conjunto de vértices es $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P\}$ y cuyas aristas vienen dadas por la siguiente figura:

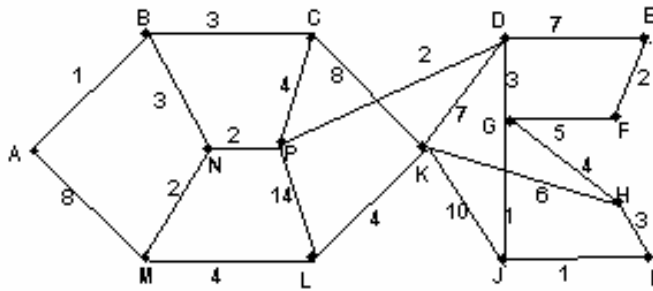


Contesta razonadamente a las siguientes preguntas:

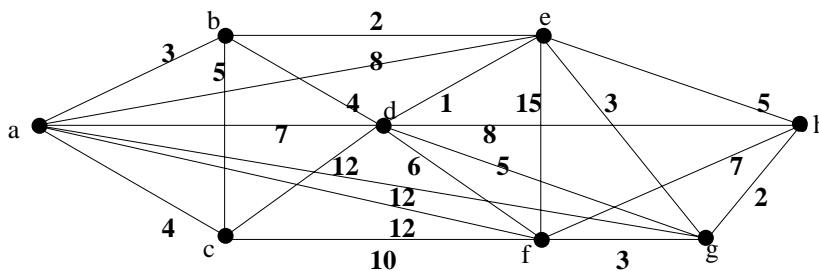
- a) ¿Existe algún camino euleriano cerrado en G ?
- b) ¿Existe algún camino hamiltoniano cerrado en G ? En caso afirmativo, hállalo.
- c) ¿Cuál es el número cromático de G ?

10) Se considera el grafo ponderado G correspondiente a una red viaria que comunica el conjunto de ciudades $V = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, P\}$ y cuyas vías, con las distancias correspondientes entre las ciudades, vienen dadas por la figura adjunta.

- a) Se quiere renovar una parte de la red viaria, con el mínimo coste posible de construcción, de modo que todas las ciudades queden comunicadas por tramos renovados. ¿Qué tramos habrá que renovar?
- b) Prueba que el grafo G es bipartido y encuentra la partición del conjunto de vértices V .



11) El siguiente grafo muestra la red de calles que comunica los distintos puntos de interés turístico de una ciudad junto con el coste estimado para la renovación de los distintos tramos.

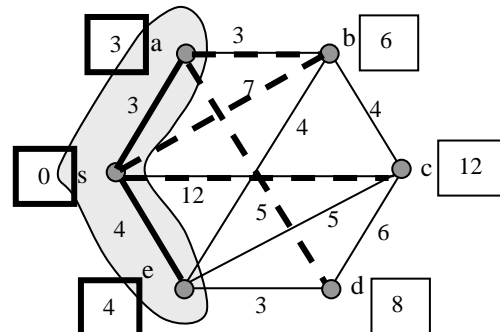


Responde a las siguientes preguntas justificando todas las respuestas:

- ¿Qué tramos hay que renovar para que el coste total sea mínimo y cada punto de interés tenga acceso por un tramo renovado?
- Analiza si la red de calles se puede dibujar de modo que las únicas intersecciones entre las distintas calles se produzcan en un punto de interés turístico.
- ¿Cuál es el mínimo número de colores que se necesitan para colorear en el grafo los puntos de interés turístico de modo que no reciban el mismo color dos puntos adyacentes?
- ¿Existe un paseo que recorra todas las calles una sola vez y regrese al punto de partida?, ¿y si no imponemos la condición de regresar al punto de partida?
- Las calles de esta zona son estrechas, y los coches sólo pueden circular en una dirección. Estudiar si es posible orientar las calles de modo que desde cualquier lugar de interés turístico se pueda ir a cualquier otro. En caso de que sea posible, dar una orientación con esas condiciones.

12) En el grafo ponderado de la figura se están calculando, por el algoritmo de Dijkstra, las distancias desde s a cada uno de los restantes vértices del grafo. Los vértices s , a y e han alcanzado su etiqueta definitiva (enmarcada en trazo grueso), mientras que en el resto de vértices aparece su etiqueta provisional (enmarcada en trazo fino).

- ¿Qué etiquetas cambian en el siguiente paso?
- ¿Cuál es el siguiente vértice en alcanzar etiqueta definitiva?



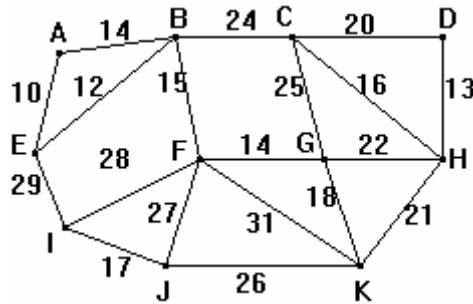
13) Se considera la sucesión $[4, 4, 3, 3, 3, 3]$. ¿Es una sucesión gráfica? En caso afirmativo, construye dos grafos simples, uno planar y otro no planar, que la tengan como sucesión de grados. ¿Existe un grafo bipartido con esta sucesión?

14) Si $G = (V, A)$ es un grafo simple se llama complementario de G al grafo $\bar{G} = (V, A^*)$ que tiene los mismos vértices que G y por aristas a todos los pares de vértices que no son aristas de G . Se pide:

- Si G tiene v vértices y a aristas, ¿cuántas aristas tiene su complementario?
- Probar que si G es simple, conexo y planar con $v \geq 3$, entonces $a \leq 3(v - 2)$.
- Probar que si G y \bar{G} son planares, entonces $v < 11$.

15) En la figura aparece un grafo ponderado G .

- Construir el árbol generador mínimo de G .
- Calcula los caminos más cortos desde A a los vértices que disten de A menos de 45.



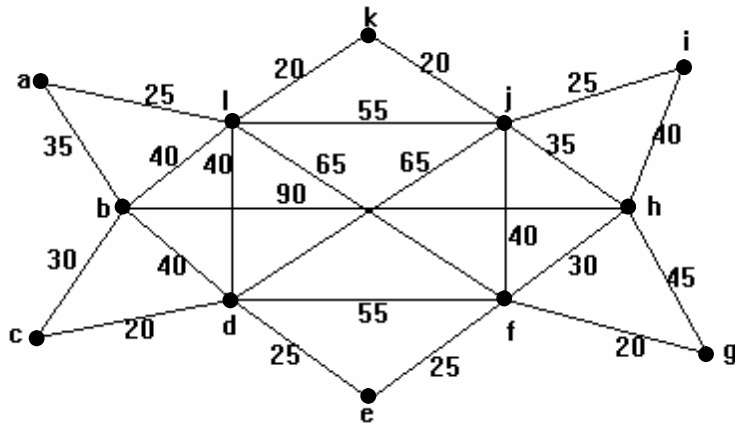
16) Un grafo G conexo tiene la siguiente sucesión gráfica $d = (5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2)$.

- Si G es planar, ¿cuántas caras tiene?, ¿es un grafo euleriano?
- Si G es bipartido, ¿cuál es su número cromático?, ¿es un grafo hamiltoniano?

17) Sea G un grafo simple de 10 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 6 y el número de aristas es múltiplo de 13. Se pide:

- Probar que G es conexo.
- Hallar el número de aristas de G .
- Demostrar que G posee ciclos impares.
- Hallar el número de vértices de grado 6 suponiendo que G es euleriano.

18) Los empleados de una empresa tienen sus ordenadores conectados entre sí según la red de la figura en cuyas conexiones se indica el coste por unidades de longitud de cable. Se pide:

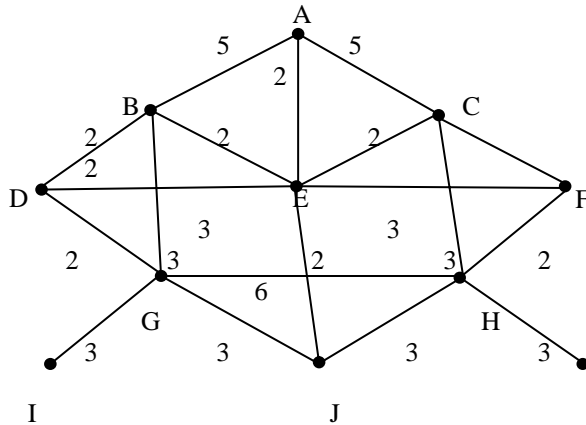


- Hallar un camino, si existe, para que un técnico pueda revisar todos los tramos de la red sin pasar dos veces por el mismo tramo.
- El técnico proyecta variar el recorrido de los cables de forma que las líneas de conexión no se corten, ¿es posible el nuevo proyecto?
- El técnico proyecta simplificar la red suprimiendo conexiones, de forma que la red resultante tenga un coste mínimo y de manera que todos los ordenadores queden conectados entre sí, ¿cuál sería el nuevo proyecto?

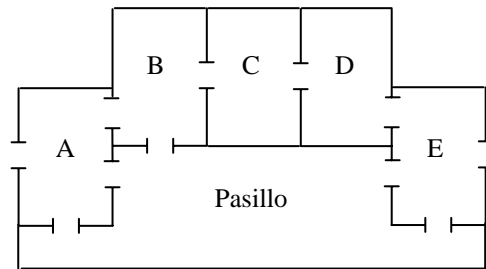
19) La red de ordenadores de una determinada empresa puede ser representada por el siguiente grafo, donde los pesos de las aristas corresponden a la longitud de los cables, en metros.

- Desde el terminal A se quiere enviar un mensaje al terminal D por el camino mínimo. ¿Recorre este mensaje necesariamente el tramo BD ? Obtener un árbol de caminos mínimos desde el terminal A al resto de los terminales.
- Se quieren renovar algunos tramos de la red, de forma que el coste de renovación sea mínimo (el coste es proporcional a la longitud del tramo) y que todo par de terminales quede conectado por un camino renovado. ¿Cuáles son los tramos a renovar?, ¿hay que renovar necesariamente el tramo BD ? ¿Cuál es el coste total de la renovación?

c) ¿Se puede mandar un mensaje desde el terminal K, que recorra todos los demás terminales (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J), pasando una sola vez por cada terminal? En caso afirmativo decir cuál sería el camino.

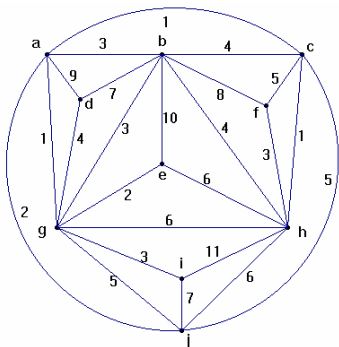


20) Un museo de arte ha ordenado la exposición que actualmente presenta en cinco salas, como muestra la figura:



- ¿Existe alguna forma de recorrer la exposición de modo que se pase por cada puerta sólo una vez y se vuelva al punto de partida? En caso afirmativo, trace el recorrido y en caso negativo, trace un recorrido, que empiece y termine en el exterior del museo, en el que exista un mínimo número de puertas por las que haya que pasar dos veces.
- Se quiere pintar las distintas salas y el pasillo de la exposición de forma que dos recintos comunicados por puertas, tengan colores distintos. ¿Cuál es el mínimo número de colores necesario?

21) Se considera una red de ordenadores conectados entre sí como muestra el grafo adjunto, en las que se indica la longitud en metros de los cables de conexión.



- Halle las conexiones mínimas, en metros de cable, entre el ordenador **a** y cada uno de los restantes ordenadores de la red.
- ¿Cuántos metros de cable podemos ahorrar suprimiendo conexiones de forma que no perdamos conectividad en la red?
- ¿Cuál es el mínimo número de turnos de vacaciones necesario, si no pueden tomar vacaciones, simultáneamente, personas que tengan sus ordenadores directamente conectados?

22) Dada la matriz de adyacencia de un grafo G , con conjunto de vértices $V = \{v_1, \dots, v_{10}\}$, se pide:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Halla la sucesión de grados y el número de aristas de G.
- Construye un árbol de búsqueda en anchura con raíz en el vértice v_1 . ¿Es G conexo?
- ¿Es un grafo bipartido?
- ¿Existe algún camino hamiltoniano abierto o cerrado?

23) Sea $G = (V, A)$ un grafo simple con $2n$ vértices y $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ la matriz de adyacencia de G, con A, B, C

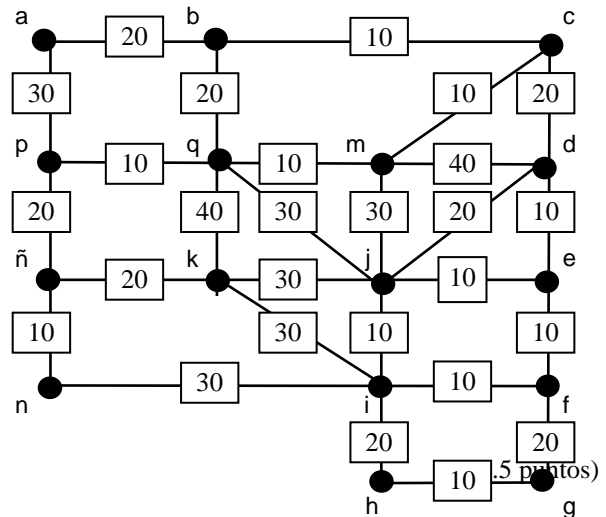
de orden $n \times n$. Responde razonadamente en cada uno de los siguientes casos:

- Si $B = 0$, ¿es G conexo?
- Si $A = C = 0$, ¿es G bipartido?
- Si B tiene todas las entradas igual a 1 y $A = C = 0$, ¿es G hamiltoniano?
- Si G es conexo y la suma de las entradas de M es $2n-2$, ¿es G un árbol?

24) El grafo de la figura representa un barrio de una ciudad, donde la etiqueta de cada arista es la longitud de la calle correspondiente.

En "a" estalla una conducción de gas. La onda expansiva tiene un alcance de 60 m. y se propaga a través de las calles.

¿Cuáles son las plazas no afectadas?



25) Se quiere construir una nueva red de carreteras que conecte 8 ciudades: {A, B, C, D, E, F, G, H}. El coste de construcción estimado entre cada dos ciudades viene dado por la tabla adjunta. ¿Qué tramos de carretera han de construirse para que el presupuesto total sea el mínimo posible?

	B	C	E	F	H
A	6		13		5
B		7			6
D	8	8	5	12	
F			11		9
G		6		10	10

26) Sea G un grafo simple de 12 vértices tal que el grado de cada vértice es al menos 7 y el número de aristas es múltiplo de 17. Se pide:

- Probar que G es conexo.
- Hallar el número de aristas de G.
- Demostrar que G posee ciclos impares.
- Hallar el número de vértices de grado 8 suponiendo que G es euleriano.
- ¿Es G hamiltoniano?