

9) Calcula los restos de dividir

- a) 3^{47} entre 23 b) 6^{592} entre 11 c) 3^{15} entre 17 d) 125^{4577} entre 13 e) 6^{20} entre 23.

10) Comprueba que $2^{340} \equiv 1 \pmod{11}$ y que $2^{340} \equiv 1 \pmod{31}$. Concluye que $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$.

11) Demuestra que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, las últimas cifras de los números n y n^5 son iguales.

12) Efectúa la siguiente operación en \mathbb{Z}_{203} : $\bar{5} + \bar{5} \cdot \bar{4}^{-169} \cdot (\bar{17})^{-1}$

13) Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $5x \equiv 1 \pmod{11}$ b) $4x \equiv 3 \pmod{7}$ c) $5x \equiv 7 \pmod{15}$.

14) Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $66x = 42$ en \mathbb{Z}_{168} b) $21x = 18$ en \mathbb{Z}_{30} c) $35x = 42$ en \mathbb{Z}_{49}

Teorema chino del resto

15) a) ¿Qué entero al dividirlo por 2 da de resto 1 y al dividirlo por 3 da también de resto 1?

b) ¿Qué entero es divisible por 5 pero queda resto 1 al dividirlo por 3?

16) Halla un número natural cuyos restos al dividirlo por 3, 4, 5 y 6 sean, respectivamente, 2, 3, 4 y 5. (Brahmegupta, s. vii)

17) Resuelve el sistema de congruencias $x \equiv 2 \pmod{5}$, $2x \equiv 1 \pmod{7}$, $3x \equiv 4 \pmod{11}$.

18) Halla los números enteros n tales que $n + 1$ es múltiplo de 3, $n + 3$ es múltiplo de 4 y $n + 5$ es múltiplo de 7.

19) Sabiendo que $\text{mcd}(b, 561) = 1$, justifica las siguientes afirmaciones:

- b verifica: $b^2 \equiv 1 \pmod{3}$, $b^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, $b^{16} \equiv 1 \pmod{17}$
- b verifica: $b^{560} \equiv 1 \pmod{3}$, $b^{560} \equiv 1 \pmod{11}$, $b^{560} \equiv 1 \pmod{17}$
- b verifica: $b^{560} \equiv 1 \pmod{561}$

20) Resuelve el sistema de congruencias $\begin{cases} 120x \equiv 180 \pmod{450} \\ 24x \equiv 76 \pmod{100} \end{cases}$

21) Una banda de 17 piratas, se reúne para repartirse un cofre con más de cien monedas de oro. Efectuado equitativamente el reparto sobra una moneda. En la pelea resultante para adjudicarla muere un pirata y vuelven a realizar el reparto sobrando una moneda. ¿Cuál es el mínimo número de monedas que puede contener el cofre?

Supongamos que la solución anterior es el número real de monedas que contenía el cofre y que la historia continúa: siempre que sobran monedas en el reparto hay pelea y muere un pirata, ¿cuántos piratas quedarán vivos cuando en el reparto no sobre ninguna moneda?

22) Se reparten cuatro bolsas iguales de caramelos entre tres grupos de niños. En el primer grupo, que consta de cinco niños, se reparten dos bolsas y sobra un caramelo. En el segundo grupo, de seis niños, se reparte una bolsa y sobran dos caramelos. En el tercer grupo, de siete niños, se reparte una bolsa y sobran tres caramelos. Sabiendo que, en total, el número de caramelos no llegaba a 500, ¿cuántos caramelos había en cada bolsa?.

23) Un distribuidor de equipos informáticos efectuó un pedido de entre 1000 y 1500 equipos a un fabricante que se los envió en contenedores completos con capacidad para 68 equipos cada uno. El distribuidor los repartió a los diferentes puntos de venta usando furgonetas con capacidad para 20 equipos y quedando 32 equipos sin repartir en el almacén. ¿Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica?

24) Se tiene una cantidad par de monedas, menor que 600, que se quieren disponer en filas. Si se ordenan, de manera contigua, completando filas de 17 monedas cada una, sobran 8 monedas. Si se consideran únicamente la mitad de las monedas iniciales y se ordenan en filas de 7 monedas, sobran 3 monedas. Averigua la posible cantidad inicial de monedas. ¿Es única la solución?