

# CÁLCULO INFINITESIMAL

## Números complejos

Facultad de Informática (UPM)

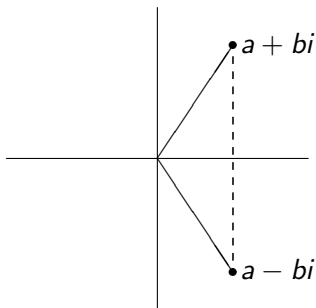
Grupo 2B



# Conjugado de un número complejo

## Definición

Sea  $z = a + bi$ . Se llama conjugado de  $z$  al complejo  $\bar{z} = a - bi$ .



## Propiedades

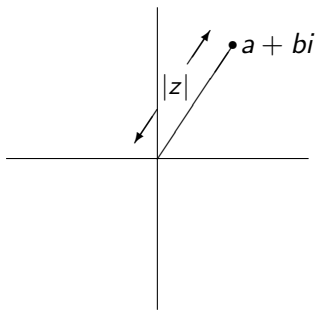
Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , se cumplen las siguientes propiedades:

- i)**  $\overline{\bar{z}} = z$ .
- ii)**  $z = \bar{z} \Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0$ .
- iii)**  $\overline{-z} = -\bar{z}$ .
- iv)**  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ .
- v)**  $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$ .
- vi)** Si  $z \neq 0$ ,  $\overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$ .

# Módulo de un número complejo

## Definición

Sea  $z = a + bi$ . Se llama módulo de  $z$  al número real no negativo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$ .



## Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , se cumplen:

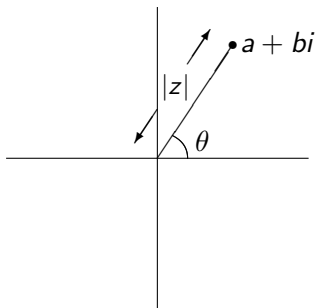
- i)**  $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$ .
- ii)**  $|\bar{z}| = |z|$  y  $|-z| = |z|$ .
- iii)**  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$  y  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$ ,  $|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$ .
- iv)**  $|z|^2 = z\bar{z}$ .
- v)**  $|zw| = |z| |w|$ .
- vi)** Si  $z \neq 0$ ,  $|z^{-1}| = (|z|)^{-1}$ .
- vii)**  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

# Argumento de un número complejo

## Definición

Sea  $z = a + bi \neq 0$ . Un argumento de  $z$  es un ángulo  $\theta$  tal que  $a = |z| \cos \theta$  y  $b = |z| \sin \theta$ . Al único valor  $\theta \in [0, 2\pi)$  le llamaremos  $\text{Arg}(z)$ , o argumento principal. Se cumple que  $\arg z = \text{Arg}(z) + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

Al par  $(|z|, \text{Arg}(z))$  se le llama forma polar del complejo  $a + bi$ , y a la expresión  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , forma trigonométrica de  $z$ .



## Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces se verifica

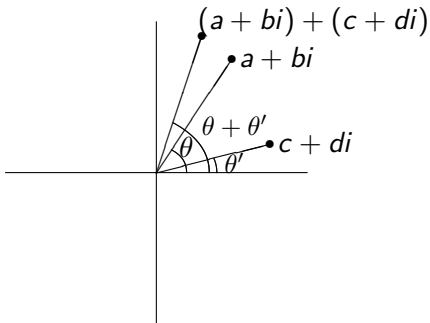
- i)  $\arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$ .
- ii)  $\arg(zw) = \arg z + \arg w + 2k\pi$ .
- iii) Sea  $w \neq 0$ ,  $\arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w + 2k\pi$ .
- iv) Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$ .

# Productos y potencias de números complejos

## Teorema

Sean  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  y  $z' = |z'|(\cos \theta' + i \operatorname{sen} \theta')$ , entonces

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \operatorname{sen}(\theta + \theta')).$$



## Corolario

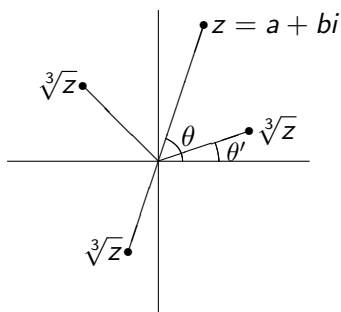
Sea  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  y sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

# Raíces de números complejos

## Definición

Sea  $z \in \mathbb{C}^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , se dice que  $w \in \mathbb{C}$  es raíz  $n$ -ésima de  $z$  si y solo si  $w^n = z$ .



## Proposición

Sea  $z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , existen  $n$  raíces  $n$ -ésimas distintas de  $z$ , que vienen dadas por  $w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos \varphi_k + i \operatorname{sen} \varphi_k)$ , siendo

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

# La exponencial compleja

## Definición

Definimos  $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  como  $e^{a+bi} = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$ .

En particular,  $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x$  y  $e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$  (fórmula de Euler de un número complejo).

## Definición

La fórmula de Euler permite introducir una nueva forma de representar un complejo

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z|e^{\theta i}.$$

Esta nueva forma  $|z|e^{\theta i}$  se conoce como forma exponencial.

## Propiedades

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$ , entonces se cumplen:

**i)**  $e^{z+w} = e^z e^w.$

**ii)**  $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}.$

**iii)**  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$

**iv)**  $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}.$

**v)**  $\operatorname{sen} \alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}, \text{ si } \alpha \in \mathbb{R}.$

# Logaritmos complejos

## Definición

Sea  $z \in \mathbb{C}^*$ , llamaremos logaritmo neperiano de  $z$ ,  $\ln z$ , al número complejo al que hay que elevar  $e$  para que de  $z$ . Veremos que, sorprendentemente, existen una cantidad numerable de complejos que son logaritmos de  $z$ .

## Proposición

Sea  $z \in \mathbb{C}^*$ , entonces  $\ln z = \ln |z| + i \arg(z) + 2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Al valor  $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$  se conoce como logaritmo principal.

## Definición

Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  con  $z \neq 0$ ,  $z^w = e^{w \cdot \ln z}$ .

# Funciones circulares complejas

## Definición

Sea  $x \in \mathbb{R}$ , llamaremos funciones hiperbólicas reales a

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{y} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

## Definición

Sea  $z \in \mathbb{C}$ , entonces definimos

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, & \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, & \tan z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \\ \cosh z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \sinh z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, & \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}. \end{aligned}$$

# Polinomios en $\mathbb{C}$

## Teorema

Sea  $P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$  un polinomio con coeficientes reales, es decir,  $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces si  $z = a + bi$  es raíz de  $P_n(z)$ ,  $\bar{z} = a - bi$  también es raíz de  $P_n(z)$ .