CÁLCULO INFINITESIMAL
Números reales

Facultad de Informática (UPM)

Grupo 2B

Números enteros

Definición

El conjunto de los números enteros es el conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

En $\mathbb{Z}$ se pueden definir dos operaciones binarias internas $+, \cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ con las siguientes propiedades:

- **i)** $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (asociativa),
- **ii)** $a + b = b + a$, $ab = ba$, para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ (conmutativa),
- **iii)** $a + 0 = a$, $a1 = a$, para todo $a \in \mathbb{Z}$ (existencia de elemento neutro),
- **iv)** para todo $a \in \mathbb{Z}$ existe $-a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + (-a) = 0$ (existencia de elemento opuesto),
- **v)** $ab = ac \Rightarrow b = c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ con $a \neq 0$ (cancelativa).
- **vi)** $a(b + c) = ab + ac$, para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$ (distributiva).

Conjuntos ordenados

Definición

En $\mathbb{Z}$ se puede definir una relación de orden compatible con la suma y el producto:

$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a + c \leq b + c & \text{para todo } c \in \mathbb{Z} \\ ac \leq bc & \text{para todo } c \in \mathbb{Z} \text{ con } c \geq 0 \end{cases}$$

Observación

Una relación $\leq$ en un conjunto A es una relación de orden si es reflexiva ($a \leq a$, para todo $a \in A$), antisimétrica ($a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b$) y transitiva ($a \leq b$ y $b \leq c \Rightarrow a \leq c$).

Un conjunto ordenado es un par $(A, \leq)$, donde $\leq$ es una relación de orden en A.

Elementos característicos de conjuntos ordenados

Observación

Dado $(A, \leq)$ conjunto ordenado y dado un subconjunto no vacío S de A:

- **i)** $c \in A$ es cota superior de S si $x \leq c$ para todo $x \in S$,
- **ii)** $c \in A$ es cota inferior de S si $c \leq x$ para todo $x \in S$,
- **iii)** $s \in A$ es extremo superior o supremo de S si es cota superior y para toda cota superior c de S se tiene $s \leq c$,
- **iv)** $i \in A$ es extremo inferior o ínfimo de S si es cota inferior y para toda cota inferior c de S se tiene $c \leq i$.
- **v)** $m \in S$ es máximo de S si $x \leq m$ para todo $x \in S$,
- **vi)** $m \in S$ es mínimo de S si $m \leq x$ para todo $x \in S$.
- **vii)** Se dice que S está acotado superiormente si tiene una cota superior.
- **viii)** Se dice que S está acotado inferiormente si tiene una cota inferior.
- **ix)** Se dice que S está acotado si está acotado superiormente e inferiormente.

El axioma de buena ordenación

Propiedad (Axioma de buena ordenación en $\mathbb{Z}$)

Si X es un subconjunto no vacío acotado inferiormente de $\mathbb{Z}$, entonces X tiene mínimo.

Consecuencia

Si X es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces X tiene mínimo.

Teorema (Principio de inducción)

Sea $S \subset \mathbb{N}$ tal que: **i)** $1 \in S$, **ii)** *si* $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$.
Entonces $S = \mathbb{N}$.

Teorema (Principio de inducción fuerte)

Sea $z_0 \in \mathbb{Z}$ y sea $S \subset Z_0 = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq z_0\}$ tal que:
i) $z_0 \in S$, **ii)** *si* $\{z_0, z_0+1, \ldots, n\} \subset S \Rightarrow n+1 \in S$.
Entonces $S = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq z_0\}$.

Cardinalidad de conjuntos

Definición

Se dice que dos conjuntos A y B son coordinables o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal cuando puede establecerse una aplicación biyectiva entre ambos.

Definición

Diremos que un conjunto A es infinito cuando es equipotente a una parte propia[a] de si mismo.

[a] Se dice que $B \subset A$ es una parte propia de A si $B \neq A$.

Numerabilidad

Definición

Diremos que un conjunto infinito es numerable cuando es equipotente a $\mathbb{N}$.

Proposición

$\mathbb{Q}$ es numerable.

Proposición

El conjunto resultante de la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.

Proposición

El conjunto $[0,1] = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$ es no numerable.

Corolario

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces $[a, b]$ es no numerable.

Números irracionales

Definición

Diremos que un número real es irracional si no puede expresarse como cociente de dos enteros.

Proposición

$\sqrt{2}$ es irracional.

Corolario

Si $m, n \in \mathbb{Z}^*$ entonces $\dfrac{m}{n}\sqrt{2}$ es irracional.

Definición de cuerpo

Definición

La terna $(M, +, \cdot)$ formada por un conjunto y dos leyes de composición, se dice que es un cuerpo, si satisfacen las siguientes propiedades:

i) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ para cualesquiera $a, b, c \in M$ (asociatividad).

ii) $a + b = b + a$, $a{\cdot}b = b{\cdot}a$ para cualesquiera $a, b \in M$ (conmutatividad).

iii) existe $\overline{0} \in M$ tal que $a + \overline{0} = \overline{0} + a = a$ para todo $a \in M$ (elemento neutro), existe $\overline{1} \in M$ tal que $a{\cdot}\overline{1} = \overline{1}{\cdot}a = a$ para todo $a \in M$ (elemento unitario).

iv) para todo $\forall a \in M$, existe $b \in M$ $(b \equiv (-a))$ tal que $a + b = b + a = \overline{0}$ (existencia del opuesto), para todo $a \in M^* = M - \{\overline{0}\}$, existe $b \in M$ $(b \equiv a^{-1})$ tal que $a{\cdot}b = b{\cdot}a = \overline{1}$ (existencia del inverso).

v) $a{\cdot}(b+c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c$, $(a+b){\cdot}c = a{\cdot}c + b{\cdot}c$ para cualesquiera $a, b, c \in M$ (propiedad distributiva).

vi) $\overline{0} \neq \overline{1}$ (el cuerpo debe tener por lo menos dos elementos).

Definición de cuerpo ordenado

Definición

Dada una relación de orden en un cuerpo M , se dice que es compatible con la suma y el producto si:

$$a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a + c \leq b + c & \text{para todo } c \in M \\ ac \leq bc & \text{para todo } c \in M \text{ con } c \geq 0 \end{cases}$$

Se dice entonces que M es un cuerpo ordenado.

Propiedades

Sea $(M, +, \cdot)$ cuerpo ordenado, se cumplen las siguientes propiedades:

i) $a \leq b$ *y* $b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b.$

ii) $a \leq b$ *y* $b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c.$

iii) $\forall a, b \in M$ *se cumple* $a \leq b$ *o* $b \leq a.$

iv) $a \leq b, \forall c \in M$ *se cumple* $a + c \leq b + c.$

v) $a \leq b, \forall c \geq 0,$ *se cumple* $ac \leq bc.$

Cuerpo ordenado completo

Definición

Si se cumple que todos los subconjuntos acotados de un cuerpo ordenado, tienen supremo e ínfimo, diremos de ese cuerpo que es ordenado y completo.

Teorema

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *es cuerpo ordenado completo y además es el único que existe salvo isomorfismos.*

Propiedad Arquimediana de los números reales

Proposición

$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0\ \exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$.

Corolario

Sea $a \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$, *entonces existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$.

Proposición

Entre dos reales cualesquiera siempre existen racionales.

Proposición

Entre dos números reales siempre existen irracionales.

Valor absoluto. Propiedades

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$, llamaremos valor absoluto de a, a $|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$.

Propiedades

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, se cumplen:

i) $|a| = |-a|$.

ii) $|ab| = |a|\,|b|$.

iii) *Si* $c > 0$; $|a| \leq c \;\Leftrightarrow\; -c \leq a \leq c$.

iv) $-|a| \leq a \leq |a|$.

v) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Intervalos en $\mathbb{R}$

Definición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, llamaremos:

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$.
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$.
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$.
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$.
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Teorema

Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *y* $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, *entonces se verifica*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Corolario (Desigualdad de Minkowski)

Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, *con* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, *entonces se cumple que*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$