Examen Extraordinario de Septiembre 3 de Septiembre de 2005	Cálculo Infinitesimal	Tiempo 3h.30m. 1+1+1.5+1.5+1.5+1+1.5+1

1. Hallar las soluciones de la ecuación $z^5 - i = 0$, calcular el producto de todas ellas y expresarlo en forma binómica.

2. Calcular, dependiendo de los valores de $a > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a^n + n}{a^{n-1} + 2n}$.

3. Se considera la función $f : A \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3 - 3x + 2}}{x^2 - 3x + 2}$.
   Se pide:

   a) Averiguar su dominio $A \subset \mathbb{R}$.

   b) Se considera la nueva función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

   $$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ 1 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus A \end{cases}$$

   Se pide estudiar los tipos de discontinuidades que presenta $g(x)$.

4. De entre todas las elipses que pasan por el punto $(1,1)$ y tienen por ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$ y $b > 0$, encontrar la de área mínima.

5. Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{|\cos x|}{3 + 3\operatorname{sen} x + \cos^2 x}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

6. Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-2)^n + 2n}{5^n}$ y, si es posible, obtener su suma.

7. Sea

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + \operatorname{sen}^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Calcular los límites de f en $(0,0)$ según las rectas de ecuación $y = mx$.
   ¿Es f continua en $(0,0)$?

   b) Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,\pi/2)$.

   c) Calcular la derivada direccional de f en $(0,\pi/2)$ según la dirección del vector $\vec{v} = (-1,1)$.

8. Calcular los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\left(x - y^2\right)^2$.

NOTA:

Fecha estimada de publicación de calificación

Fecha estimada de revisión