

APELLIDOS:

GRUPO:

NOMBRE:

1. Señalar la certeza o falsedad de las afirmaciones de la siguiente página.. (Cada pregunta con los tres apartados acertados puntuará 0.5, dos aciertos y la otra en blanco 0.3, un acierto y dos en blanco o dos aciertos y un error 0.2 y más de un error no puntúa)

2. a) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}}{\ln n}$ .

b) Estudiar la convergencia y la conergencia absoluta de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ .

3. Dada la sucesión de funciones  $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , se pide:

a) Estudiar el campo de convergencia  $A$  y calcular  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

b) Estudiar si  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

c) Estudiar si  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$ .

4. Dada la función  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{2/3}y^{4/3}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$  Se pide:

a) Estudiar la continuidad de  $f$  en  $\mathbb{R}^2$ .

b) Estudiar la diferenciabilidad de  $f$  en  $(0, 0)$ .

c) En el punto  $(1, 0)$ , calcular:

i) El plano tangente a la gráfica de  $f$  en  $(1, 0, 0)$ .

ii) La derivada direccional de  $f$  en el punto  $(1, 0)$  según la dirección del vector  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

d) Si  $\varphi(t) = (t + 1, t)$  y  $F = f \circ \varphi$ , calcular  $F'(0)$ .

5. a) Estudiar si la función  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2$  alcanza un extremo relativo en los puntos  $(\sqrt{2}, 0)$ ,  $(1, 1)$  y  $(0, 0)$ .

b) Calcular los extremos absolutos de  $f$  en  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 = 4\}$ .

Señalar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

V F

i) Sea  $(a_n)$  una sucesión de números reales tal que  $a_n \rightarrow a$ .

a) La sucesión  $\{a_n - a_{n+1}\}$  tiende a cero.

b) Si  $a = 0$ , entonces la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

c) Si  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  diverge.

ii) Sea la serie de potencias  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ , con  $a_n \rightarrow 3$ .

a) El radio de convergencia de la serie es  $1/3$ .

b) Sea  $R$  el radio de convergencia de la serie anterior.  
El campo de convergencia es  $(a - R, a + R)$ .

c) Sea  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ , entonces  $f$  es derivable y  
 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$  en  $(-R, R)$ .

iii) Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $(a, b)$  un punto de acumulación de  $A$ .

a) Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x, b) = 0$  y  $\lim_{y \rightarrow b} f(a, y) = 0$ .

b) Si  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right)$  no existe, entonces no existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ .

c) Si para todo  $m \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ y = m(x-a) + b}} f(x, y) = f(a, b),$$

entonces  $f$  es continua en  $(a, b)$ .

iv) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Si existen  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $(a, b)$ .

b) La función  $f(x, y) = x^2 + y^2$  en el punto  $(1, 0)$  crece más rápido en la dirección del eje OX que en la dirección del eje OY.

c) Si  $f$  es continua en  $\Omega = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , entonces  $f$  esta acotada en  $\Omega$ .