

1. **Teoría** Enunciar y demostrar el Teorema de Bolzano.

2. a) Demostrar por inducción que:

$$\frac{2}{1} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

b) Sea  $A = \{z \in \mathbb{Z} \mid |z - 5\sqrt{2}i| \leq 5\}$ . Se pide:

b1) Representar gráficamente la región  $A$ .

b2) Obtener el  $z \in A$  que tenga el argumento más pequeño posible, expresándolo en forma binómica, trigonométrica y exponencial.

3. Sea  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$ , y sean

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in (n, n+1), y \in \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \right\}, B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n,$$

$$C_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \mid x \in \left( \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right), y \in (n, n+1) \right\}, C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Sea  $A = H \setminus (B \cup C)$ .

Averiguar si  $A$  es abierto, cerrado y calcular  $Fr(A)$ .

4. a) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^p + \left(\frac{4}{3}\right)^{2p} + \left(\frac{5}{4}\right)^{3p} + \cdots + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{np}}{n}, p \in \mathbb{R}.$

b) Estudiar el carácter de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n$  según los valores de  $a \in \mathbb{R} (a \neq 1)$  y sumarla para  $a = \frac{1}{3}$ .

5. Sea  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g(x) = \frac{-1}{x^2 - 5x + 6} \frac{|x-2|3^{\ln|x-1|}}{|x-2|3^{\ln|x-1|}}$ . Se pide:

a) El dominio  $M$  de  $g$ .

b) Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in M \\ 0 & \text{si } x \notin M \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de  $f(x)$  y analizar el tipo de discontinuidades que presenta.