Examen Extraordinario
10 de Septiembre de 1999

Cálculo Infinitesimal

Tiempo 3h
$2 + 2 + 1.5 + 2 + 2.5$

APELLIDOS Y NOMBRE:	GRUPO:

1. **Teoría**: Enunciar y demostrar el Teorema de Weierstrass.

2. a) Demostrar por inducción que la sucesión $a_n = \dfrac{4^n}{n!}$ es decreciente a partir de $n \geq k$, y calcular k. Probar que $\{a_n\}$ tiene límite y calcularlo.

   b) Averiguar para que valores de $a \in \mathbb{R}$ convergen las siguientes series: $\sum_{n=0}^{\infty} (\operatorname{sen} a)^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} 1/(1-a)^n$.

3. Sea $f(x) = \dfrac{x^{2/3}}{1-x}$. Se pide:

   i) Continuidad y derivabilidad.

   ii) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   iii) Calcular las asíntotas y extremos relativos.

   iv) Con los resultados anteriores esbozar la gráfica de $f(x)$.

4. a) Dibujar la región $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - 1 \leq y \leq 1 - |x|\}$ del plano y plantear una integral que represente su área sin calcularla.

   b) Se tiene media sandía esférica, de radio r, cortada en n rodajas de igual anchura. Calcular el área de la corteza de cada una de las rodajas, y averiguar cual de las rodajas tiene más corteza.

5. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$ Se pide:

   i) Continuidad en $(0,0)$.

   ii) Diferenciabilidad en $(0,0)$.

   iii) Ecuación del plano tangente en el punto $(1,0)$.

   b) Calcular el área del mayor rectángulo inscrito en un semicírculo de radio R.

Nota: La pregunta de teoría se contestará en el reverso de esta página.