Examen Extraordinario de Septiembre 6 de Septiembre de 2003	Cálculo Infinitesimal	Tiempo 3h.30m. 1.5+2+1.5+2+1.5+1.5

1. Calcular el dominio y las asíntotas de la función

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

2. *a*) Enunciar el Teorema Fundamental del Cálculo y usaralo para hallar la derivada de

$$F(x) = \int_{-2}^{x^2-1} \frac{t^2-2}{t^2+2t+2} dt$$

   b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = -1$.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

   encontrar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, para que se cumplan las dos condiciones siguientes:

   a) f sea derivable en $\mathbb{R}$.

   b) El área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el eje OX con $x \leq 0$ sea cuatro veces el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f y el eje OX con $x \geq 0$.

4. *a*) Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1-2\ln n}}$.

   b) 1) Obtener el campo de convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$.

   2) Sabiendo que $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, obtener el desarrollo en serie de potencias de la función $f(x) = xe^x$.

   3) Calcular $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$.

5. Sea $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2(y-2)}{x^2+y^2-2x-4y+5}$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in \mathrm{Dom}(f) \\ k & \text{si} \quad (x,y) \notin \mathrm{Dom}(f) \end{cases}$$

   a) Determinar el valor de k para que g sea continua en $\mathbb{R}^2$.

   b) Estudiar la diferenciabilidad de g en $\mathbb{R}^2$.

   c) Calcular la derivada direccional de g en $(1,2)$ según el vector $\vec{v} = (1,1)$.

6. Dada $f(x,y) = 4x^2e^y - ax^4 - be^{4y}$ con $a, b \in \mathbb{R}$,

   a) Determinar el valor de a y b para que el punto $(1,0)$ sea un punto crítico de f.

   b) Hallar todos los extremos relativos de f para los valores encontrados en *a*).