Segundo Parcial
1 de junio de 2001

Cálculo Infinitesimal

Tiempo 2:30h.
$2+2+2+2+2$

APELLIDOS:	
	GRUPO:
NOMBRE:	

1. Señalar la certeza o falsedad de las cuestiones que aparecen en la siguiente página. (Cada pregunta con los tres apartados acertados, puntuara 0.5, con un error 0.2 y con dos no puntúa)

2. a) Calcular el límite
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{1}+\frac{3^2}{2}+\frac{4^3}{3^2}+\cdots+\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}}{n^2}.$$
   b) Estudiar la convergencia de la siguiente serie según el parámetro $a \in \mathbb{R}^+$:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$$

3. a) Estudiar la convergencia puntual y uniforme en $[-1,1]$, de la sucesión de funciones
$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$
   b) Dada la serie de potencias $e^{x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n}$. A partir de esta, obtener la expresión analítica de la función cuya serie de potencias es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n-1)!}x^{2n-1}$.

4. Dada $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que
$$f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
   Se pide:
   a) Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}^2$.
   b) Determinar las derivadas parciales en el origen y estudiar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.
   c) Calcular, si existe, la derivada direccional de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$ según el vector $\overline{v} = (1,1)$.
   d) Calcular el plano tangente, si existe, en el punto $(1,1)$.

5. Dada la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y)$ definida en el cuadrado $D = [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.
   a) Calcular sus extremos relativos en el interior $\overset{\circ}{D}$.
   b) Calcular sus extremos absolutos en D.

Señalar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

i) Sea $a_n \to 1$.

a) Existe N_0 tal que $a_n > 1/2$ para todo $n \geq N_0$.

b) Todos los términos son positivos.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a}{a_n}\right)^n = e$

b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, entonces la sucesión $\{a_n\}$ es acotada.

c) La serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{a}{2^n}$ es convergente y su suma es $\frac{a}{4}$.

iii) Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a $f(x)$ en $[0,1]$.

a) Si $f_n(x)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x)$ es continua.

b) Si $f_n \to f$ uniformemente, entonces $f(x)$ es continua.

c) Si $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$, entonces f_n converge a f uniformemente en $[0,1]$.

iv) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Si f es continua en $(0,0)$, entonces f es diferenciable en $(0,0)$.

b) Si f es diferenciable en $(0,0)$, la derivada direccional

$$D_{\overline{v}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \overline{v} = df(0,0)(\overline{v}).$$

.

c) Si f es diferenciable en $(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, entonces f tiene un máximo o un mínimo en $(0,0)$.