Examen Final (Parte II)
19 de junio de 2001

Cálculo Infinitesimal

Tiempo 2h.
$2 + 2 + 2 + 2 + 2$

Apellidos:	
	Grupo:
Nombre:	

1. Señalar la certeza o falsedad de las cuestiones que aparecen en la siguiente página. (Cada pregunta con los tres apartados acertados, puntuara 0.5, con un error 0.2 y con dos no puntúa)

2. Calcular los valores de $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ para los que la serie siguiente converge.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^a}{\sqrt{n}a^n}.$$

3. Obtener el campo de convergencia y estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones
$$f_n(x) = \left(\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\right)^n.$$

4. Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como
$$f(x,y) = \begin{cases} x - y + (x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Se pide:
   a) Estudiar la continuidad en el origen.
   b) Función derivada parcial de f respecto de y.
   c) Calcular, si existe, la diferencial de $f(x,y)$ en el punto $(0,0)$.
   d) Calcular el plano tangente, si existe, en el punto $(0,0,0)$.
   e) Calcular la derivada direccional en el origen según el vector $v = (2,1)$ ¿Es máxima? ¿Por qué?

5. Hallar las distancias máxima y mínima desde el origen a la elipse $5x^2+6xy+5y^2 = 8$.

Señalar la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones. V F

i) Sea (a_n) una sucesión de números reales tal que $a_n \to a$.

a) Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces: $a_n \to \dfrac{1}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_n} \to a$. ☐ ☐

b) Si $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ diverge a $+\infty$. ☐ ☐

c) Si $a = \infty$, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n^2}{2n}$. ☐ ☐

ii) Sea $\{f_n(x)\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a $f(x)$.

a) $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente a $f(x)$. ☐ ☐

b) Si $f(x)$ es continua, entonces $f_n(x)$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$. ☐ ☐

c) Si $f(x)$ está acotada, entonces $f_n(x)$ está acotada para todo $n \in \mathbb{N}$. ☐ ☐

iii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

a) Si f es continua en $(0,0)$, entonces f es diferenciable en $(0,0)$. ☐ ☐

b) Si f es continua y existen $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, entonces la derivada direccional máxima se alcanza en la dirección del gradiente

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$$ ☐ ☐

c) Si f es diferenciable en $(0,0)$, entonces las derivadas parciales de f en $(0,0)$ son continuas. ☐ ☐

iv) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua.

a) Si A es compacto, existen máximo y mínimo relativos de f en A. ☐ ☐

b) Si f A es compacto, existen máximo y mínimo absolutos de f en A. ☐ ☐

c) Si la matriz Hessiana es definida positiva en un punto a interior, entonces f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$. ☐ ☐