Segundo Parcial 17 de Junio de 2004	Cálculo Infinitesimal	Tiempo 3h. 2+1+1.5+1+1.5+2+1

1. *a*) Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\sqrt{1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3}+\cdots+\frac{\sqrt{n}}{(n+1)}}{\ln n^2}$.

   b) Estudiar la convergencia de las siguientes series y sumarlas cuando sea posible

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{\ln n}\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)^{3n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\,(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}$$

2. Estudiar la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n(x)\} = \{(\ln x)^n\}$ en el intervalo $\left[e^{-1}, e\right]$.

3. Obtener el campo de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\,(n+2)} \dfrac{(x-3)^n}{2^n}$ y calcular, si es posible, la suma de la serie numérica obtenida para $x=5$.

4. Dada la curva en paramétricas $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ y(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

   a) ¿En qué puntos hay recta tangente horizontal?.

   b) Calcular las rectas tangentes en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

5. Sea $\overline{f}(x,y) = \left(x+(x-1)\,y\cos\dfrac{1}{(x-1)^2+y^2},\ \sqrt{y+x^2+4}\right)$, definida en el punto $(1,0)$ como $\overline{f}(1,0) = \left(1,\sqrt{5}\right)$.
   Estudiar la diferenciabilidad de $\overline{f}$ en el punto $(1,0)$ y calcular, en caso afirmativo, la matriz jacobiana de $\overline{f}$ en el punto $(1,0)$.

6. Dada la función $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(xy)$, se pide:

   a) Estudiar su diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$.

   b) Hallar su derivada direccional en el punto $(1,1)$, en la dirección y sentido del vector que une este punto con el origen de coordenadas.

   c) Obtener la ecuación del plano tangente a la gráfica de $f(x,y)$ en el punto $(1,1,\pi/4)$.

7. Se desea construir una caja de base rectangular sin tapa, de volumen 4m^3 . Hallar las dimensiones de la caja que tenga menor superficie, suponiendo que existe.