

CALCULO 11-M

Primera Parte

Duración 1h 30m

Ejercicio 1 (1.5 puntos) Una isla A se encuentra a 3 kilómetros del punto más próximo B de una costa rectilínea. En la misma costa, a 10 kilómetros de B se encuentra una central eléctrica C . Se quiere comunicar la isla y la central mediante un cable que conste de una parte submarina entre la isla y un punto X de la costa, situado entre B y C , y de una parte subterránea entre dicho punto y la central. El coste del cable submarino es de 20 miles de euros por kilómetro y el del cable subterráneo de 12 miles de euros por kilómetro.

1. Encontrar la función que da el coste total del cable necesario para unir la isla y la central en función de la distancia entre los puntos B y X .
2. Localizar el punto X para el cual el coste del cable sea mínimo, indicando dicho coste.

Solución:

1. Esquema



Expresando el coste en miles de euros y las distancias en kilómetros se obtiene

$$\begin{aligned} C &= 20 \times AX + 12 \times XC \\ &= 20\sqrt{9 + x^2} + 12(10 - x) \end{aligned}$$

estando x limitada al intervalo $[0, 10]$.

2. Derivando C resulta

$$\begin{aligned} C' &= 20 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - 12 \\ &= \frac{20x - 12\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}. \end{aligned}$$

Igualando a cero se obtiene la ecuación

$$5x - 3\sqrt{9+x^2} = 0.$$

De donde se sigue,

$$5x = 3\sqrt{9+x^2}.$$

Elevando al cuadrado y efectuando operaciones resulta la ecuación equivalente

$$16x^2 - 81 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = \pm \frac{9}{4}.$$

Puesto que la solución negativa no pertenece al intervalo $[0, 10]$ y la función coste es derivable nos queda un único punto crítico, el $x = 9/4$. Como dicha función es continua sabemos que existen máximo y mínimos absolutos. Estos han de encontrarse necesariamente en los puntos críticos o en los extremos del intervalo. Comparando resulta

$$\begin{aligned} C(0) &= 180 \\ C(9/4) &= 168 \\ C(10) &= 20\sqrt{109} > 200. \end{aligned}$$

El mínimo coste se alcanza para $x = 9/4$ y el máximo coste para $x = 10$.

El coste mínimo es

$$C_{\min} = 168000 \text{ euros.}$$

Ejercicio 2 (1.5 puntos) Analizar la gráfica de la ecuación

$$y = \frac{e^x}{x^2}.$$

Solución:

Para que el cociente esté definido ha de ser $x \neq 0$. Por consiguiente el dominio es $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

La función es siempre positiva pero y no corta nunca al eje OX . Tampoco es par o impar por lo que no presenta simetrías.

La función es continua en todos los puntos de su dominio. En $x = 0$ presenta una asíntota vertical siendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

por lo que $y = 0$ es asíntota horizontal por la izquierda.

La derivada en $x \in D$, $x \neq 0$ es

$$y' = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

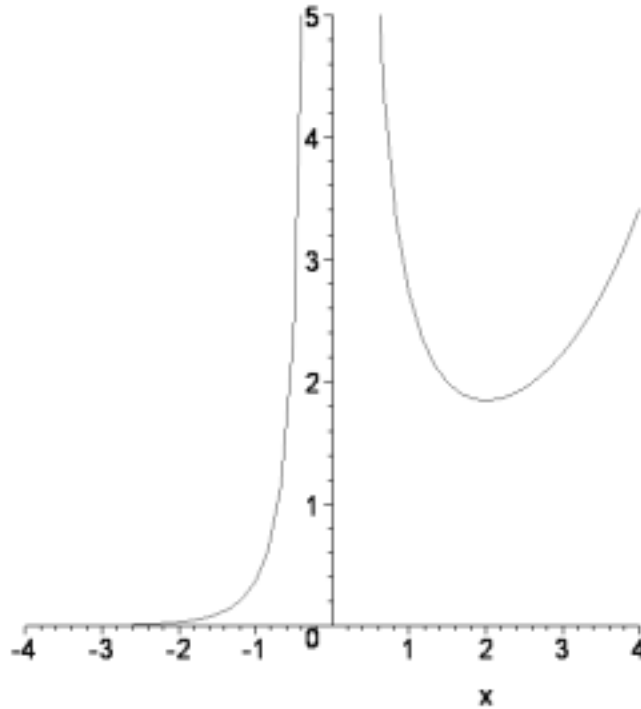
Por tanto existe un punto crítico de derivada nula en $x = 2$. La siguiente tabla reúne el signo de la derivada y los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
e^x	+	+	+
$x - 2$	-	-	+
x^3	-	+	+
y'	+	-	+
y	↑	↓	↑

La derivada segunda es

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{[e^x(x-2) + e^x]x^3 - e^x(x-2)3x^2}{x^6} \\ &= \frac{e^x(x^2 - 4x + 6)}{x^4}. \end{aligned}$$

El polinomio $x^2 - 4x + 6$ no tiene raíces reales y los tres factores de la expresión anterior son siempre positivos. En consecuencia $y'' > 0$ y la función es siempre cóncava hacia arriba. Gráfica



Ejercicio 3 (2 puntos) Sea R la región del plano limitada por las gráficas $y = x^2 - 2x$ e $y = 3x$. Calcular:

1. El volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OY .
2. El volumen del sólido cuya base es la región R y sus secciones perpendiculares al eje OX son semicírculos.

Solución:

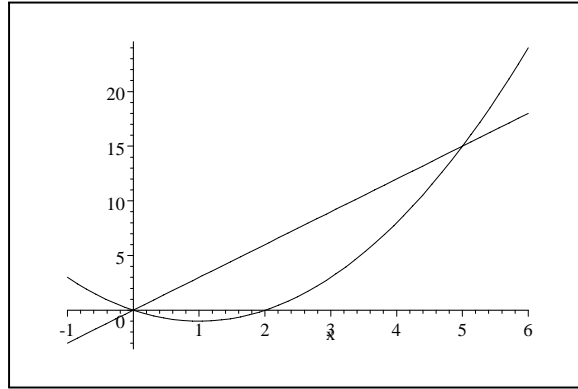
1. La primera curva, $y_1 = x^2 - 2x$, es una parábola con vértice en

$$y' = 2x - 2 = 0$$

es decir en $x = 1$ y cuyos cortes en el eje OX se encuentran en $x = 0$ y $x = 2$. La segunda gráfica, $y_2 = 3x$, corresponde a una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 3. Ambas se cortan en

$$x^2 - 2x = 3x \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

o sea en $x = 0$ y $x = 5$. Gráfica de la región R .



El volumen generado al girar la región R alrededor del eje OY es

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^5 2\pi x(y_2 - y_1) dx \\
 &= 2\pi \int_0^5 x(5x - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^5 (5x^2 - x^3) dx \\
 &= 2\pi \left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^5 \\
 &= \frac{625\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

2. En este caso el diámetro de los semicírculos es $d = y_2 - y_1$. Puesto que el área de un semicírculo de diámetro d es

$$A = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}\pi d^2$$

se tiene

$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 A(x) dx \\ &= \int_0^5 \frac{1}{8} \pi (y_2 - y_1)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \pi \int_0^5 (5x - x^2)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \pi \int_0^5 (25x^2 - 10x^3 + x^4) dx \\ &= \frac{1}{8} \pi \left(25 \frac{x^3}{3} - 10 \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^5 \\ &= \frac{1}{8} \pi x^3 \left(\frac{25}{3} - 10 \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} \right) \Big|_0^5 \\ &= \frac{625}{48} \pi. \end{aligned}$$

CALCULO 11-M

Segunda Parte

Duración 1h 30m

Ejercicio 4 (1.5 puntos)

1. *Evaluar si es posible la integral*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

2. *Determinar un desarrollo en serie de potencias para la función*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$$

y el radio de convergencia correspondiente.

Solución:

1. La integral es impropia por ser de intervalo infinito y por no estar acotada en $x = 0$, (tampoco está acotada en $x = 1$ pero queda fuera del intervalo de integración). Descomponiendo y utilizando el cambio de variable $\sqrt{x} = t$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{2 dt}{(t^2 + 1)} + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{2 dt}{(t^2 + 1)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [2 \arctan t]_{\epsilon}^1 + \lim_{b \rightarrow +\infty} [2 \arctan t]_1^b \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{\pi}{2} - 2 \arctan \epsilon \right] + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[2 \arctan b - \frac{\pi}{2} \right] \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

2. Dividiendo se tiene

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2} = \frac{x^2 + 2 - 2}{x^2 + 2} = 1 - \frac{2}{x^2 + 2}.$$

Tratamos de escribir la última fracción como si fuera la suma de una serie de potencias

$$\frac{2}{x^2 + 2} = \frac{1}{\frac{x^2}{2} + 1} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x^2}{2}\right)}.$$

De esta forma se tiene

$$f(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n x^{2n}.$$

Por ser una serie de potencias de razón $r = -x^2/2$ la serie es convergente sí y solo sí $|r| < 1$ es decir cuando

$$\left|-\frac{x^2}{2}\right| < 1 \iff x^2 < 2 \iff |x| < \sqrt{2}.$$

Ejercicio 5 (1.5 puntos) *Mostrar que la curva*

$$\mathbf{r} = (\ln t)\mathbf{i} + (t \ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

es tangente a la superficie

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

en $(0, 0, 1)$.

Solución:

El vector tangente a la curva

$$\mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (t \ln t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

es

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + (\ln t + 1)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Como la curva pasa por el punto $(0, 0, 1)$ para $t = 1$ el vector tangente en dicho punto es

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Por otra parte el vector normal a la superficie

$$xz^2 - yz + \cos xy = 1$$

en el punto $(0, 0, 1)$ es

$$\mathbf{N} = \nabla f(0, 0, 1) = f_x(0, 0, 1)\mathbf{i} + f_y(0, 0, 1)\mathbf{j} + f_z(0, 0, 1)\mathbf{k}$$

siendo

$$f(x, y, z) = xz^2 - yz + \cos xy - 1.$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f_x &= z^2 - y \sin xy \\ f_y &= -z - x \sin xy \\ f_z &= 2xz - y \end{aligned}$$

resulta

$$\mathbf{N} = \mathbf{i} - \mathbf{j}.$$

Por último observamos que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 0$$

lo que prueba que \mathbf{T} y \mathbf{N} son ortogonales y por tanto que la curva es tangente a la superficie.

Ejercicio 6 (2 puntos) *Determinar el máximo y mínimo valor de la función*

$$f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3$$

en la región limitada por el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(6, 0)$ y $(0, 6)$.

Solución:

Se trata de determinar el máximo y mínimo absoluto de una función continua en un conjunto cerrado y acotado.

En primer lugar estudiaremos los puntos críticos de f pertenecientes al interior del triángulo. Puesto que la función es diferenciable estos puntos serán solución de las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x &= 4y^2 - 2xy^2 - y^3 = 0 \\ f_y &= 8xy - 2x^2y - 3xy^2 = 0. \end{aligned}$$

Extrayendo factor común en cada ecuación resulta

$$\begin{aligned}y^2(4 - 2x - y) &= 0 \\xy(8 - 2x - 3y) &= 0.\end{aligned}$$

En el interior del triángulo tanto x como y han de ser distintos de cero por tanto el sistema se reduce a

$$\begin{aligned}2x + y &= 4 \\2x + 3y &= 8\end{aligned}$$

cuya solución es

$$x = 1, \quad y = 2.$$

Como la frontera se compone de tres segmentos analizaremos cada uno de ellos por separado.

Segmento $y = -x + 6$, $0 \leq x \leq 6$. En este caso la función a maximizar se reduce a

$$\begin{aligned}F_3(x) &= 4x(6 - x)^2 - x^2(6 - x)^2 - x(6 - x)^3 \\&= -72x + 24x^2 - 2x^3.\end{aligned}$$

Los puntos críticos de esta función han de satisfacer la ecuación

$$F_3'(x) = -72 + 48x - 6x^2 = 0$$

por lo que son las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

o sea

$$x = 2 \text{ y } x = 6.$$

Segmento $y = 0$, $0 \leq x \leq 6$. En este caso la función a maximizar se reduce a

$$F_1(x) = 0.$$

Segmento $x = 0$, $0 \leq y \leq 6$. En este caso la función a maximizar se reduce a

$$F_2(y) = 0.$$

Agrupando los candidatos y los valores de f correspondientes resulta la siguiente tabla

x	y	$f(x, y)$
1	2	4
2	4	-64
$0 \leq x \leq 6$	0	0
0	$0 \leq y \leq 6$	0

Por tanto el mínimo absoluto de f es -64 y el máximo absoluto es 4.

