

CALCULO 11-M

Examen de Septiembre 2006

Duración 2h 30m

Ejercicio 1 (3 puntos)

1. Resolver la desigualdad

$$\frac{x^2 - 12}{x} > 1.$$

2. Encontrar el área máxima posible de un rectángulo con base en el eje OX y vértices superiores sobre la curva

$$y = 3 - x^2.$$

3. Calcular el valor medio de la función

$$f(x) = \sin^3 x$$

en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución:

1. Operando resulta

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 12}{x} > 1 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 12}{x} - 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 12}{x} > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x + 3)(x - 4)}{x} > 0. \end{aligned}$$

En la última fracción existen tres factores con raíces en -3 , 0 y 4 .
Análisis de los signos

	$x < -3$	$-3 < x < 0$	$0 < x < 4$	$4 < x$
$x + 3$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
$x - 4$	-	-	-	+
resultado	-	+	-	+

Por tanto la solución es $S = (-3, 0) \cup (4, +\infty)$.

2. El área del rectángulo será

$$\begin{aligned} A &= 2xy \\ &= 2x(3 - x^2) \\ &= 6x - 2x^3 \end{aligned}$$

siendo $0 \leq x \leq \sqrt{3}$. Derivando resulta

$$A'(x) = 6 - 6x^2.$$

Igualando a cero se obtiene

$$\begin{aligned} 6 - 6x^2 &\Leftrightarrow x^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm 1 \end{aligned}$$

y desechemos la solución $x = -1$ por no pertenecer al dominio. Como la función A es continua en el intervalo $[0, \sqrt{3}]$ ha de alcanzar máximo absoluto (también mínimo) en dicho intervalo. Puesto que $A(0) = A(\sqrt{3}) = 0$ y $A(1) = 4$, la función A posee un máximo en $x = 1$. Por tanto el área máxima posible es

$$A(1) = 4.$$

3. El valor medio es

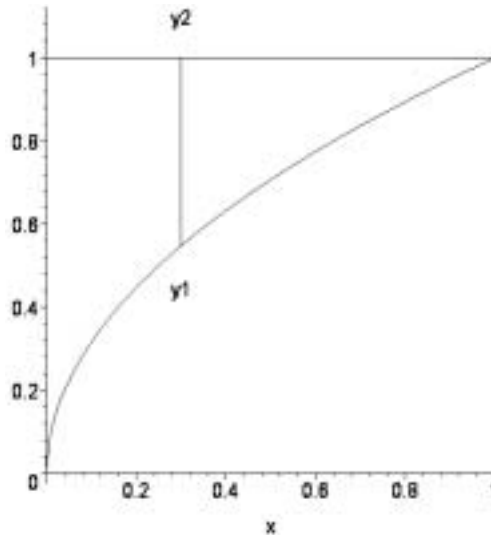
$$\begin{aligned} V_M &= \frac{1}{\pi - 0} \int_0^\pi \sin^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \sin x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = u \quad -\sin x \, dx = du \\ x = 0; u = 1 \quad x = \pi; u = -1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1 - u^2) \, du \\ &= \frac{2}{\pi} \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{4}{3\pi}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2 (2 puntos) Sea R la región del plano limitada por la curva $y = \sqrt{x}$ y las rectas $x = 0$ e $y = 1$. Calcular:

1. El volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje OY .
2. El volumen del sólido con base R y cuyas secciones perpendiculares al eje OX son triángulos equiláteros.

Solución:

1. Sea $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = 1$



Para calcular el volumen del sólido al girar alrededor del eje OY utilizamos capas cilíndricas de radio x y altura $y_2 - y_1$:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 2\pi x (y_2 - y_1) dx \\
 &= 2\pi \int_0^1 x (1 - \sqrt{x}) dx \\
 &= 2\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{5/2}}{5/2} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{\pi}{5}.
 \end{aligned}$$

2. Ahora las secciones son triángulos equiláteros de lado $y_2 - y_1$. El área de dichos triángulos es

$$\begin{aligned}
 A(x) &= \frac{1}{2} \text{base} \times \text{altura} \\
 &= \frac{1}{2} (y_2 - y_1)^2 \sin 60^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (y_2 - y_1)^2 \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} (1 - \sqrt{x})^2.
 \end{aligned}$$

Por tanto el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^1 (1 - 2\sqrt{x} + x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - 2\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{24}. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 (3 puntos)

1. Estudiar la convergencia o divergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}.$$

2. Obtener el plano tangente a la superficie $xy - 2yz - xz = 1$ en el punto $(1, -2, 1)$.
3. Calcular el área encerrada por un pétalo de la curva en polares $r = a \cos 2\theta$.

Solución:

1. Aplicando el criterio del cociente se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \\ &= e. \end{aligned}$$

Como el límite anterior es mayor que 1 la serie es divergente.

2. El gradiente de f es

$$\begin{aligned}\nabla f &= f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} + f_z \mathbf{k} \\ &= (y - z) \mathbf{i} + (x - 2z) \mathbf{j} - (2y + x) \mathbf{k}\end{aligned}$$

y en particular

$$\nabla f(1, -2, 1) = -3 \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3 \mathbf{k}.$$

En consecuencia la ecuación del plano tangente en P es

$$-3(x - 1) - (y + 2) + 3(z - 1) = 0$$

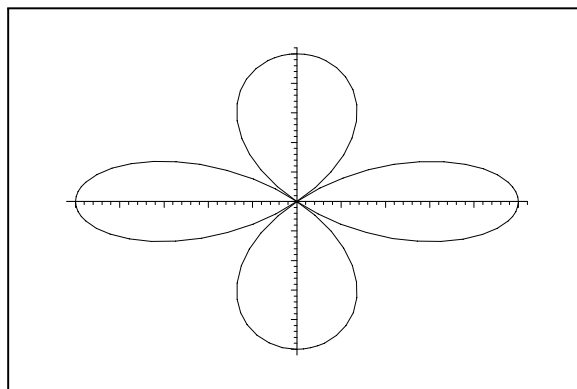
o bien

$$3x + y - 3z + 2 = 0.$$

3. Valores de r según θ

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	a	0	-a	0	a	0	-a	0	a

Gráfica en el plano polar



El área encerrada por un pétalo curva es

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\theta d\theta \\ &= a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\pi/4} d\theta + \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 4\theta d\theta \\ &= \frac{\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (3 puntos) Determinar la existencia, y el valor en su caso, de los máximos y mínimos de la función de la función

$$f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

en la región $D = \{(x, y) / x > 0, y > 0\}$.

Solución:

La función admite derivadas parciales en todos los puntos de D . Por tanto, los puntos críticos son las soluciones de

$$\begin{aligned} f_x &= y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ f_y &= x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación resulta

$$y = \frac{1}{x^2}$$

y por tanto

$$x - x^4 = 0.$$

Puesto que x ha de ser mayor que 0, resulta

$$x = 1$$

e

$$y = 1.$$

Para analizar dicho punto crítico estudiaremos las derivadas segundas

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{2}{x^3} = 2 \\ f_{xy} &= f_{yx} = 1 \\ f_{yy} &= \frac{2}{y^3} = 2. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f_{xx} = 2 > 0$$

y el determinante de la matriz hessiana

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3 > 0. \end{aligned}$$

En consecuencia existe un mínimo local en dicho punto de valor $f(1, 1) = 3$. En realidad se trata de un mínimo absoluto ya que es el único punto crítico y la función crece indefinidamente cuando x o $y \rightarrow +\infty$ o cuando x o $y \rightarrow 0$.