CÁLCULO INFINITESIMAL **GRUPO 2** **17-Septiembre-2008**

EXAMEN FINAL (Parte II)

Tiempo: 1h. y 30 min.

SOLUCIONES

1. (2 p.) Averiguar si la sucesión recurrente es convergente y, en caso afirmativo, calcular su límite:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{x_n^{\;2}}{2} \\ x_1 = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Primero se calcula el posible límite, resolviendo la ecuación: $L = \frac{1}{4} + \frac{L^2}{2}$. Se obtienen dos posibles límites: $L = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1 \pm 0.7 \Rightarrow L \approx 0.3 \;\; ó \;\; L \approx 1.7$

La sucesión es monótona creciente y acotada superiormente por 1 (ambas cosas se comprueban aplicando el método de inducción), y por lo tanto el límite es $L = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

● Es monótona creciente si se cumple que: $x_n \le x_{n+1}$ para todo n natural.

Para n=1: $x_1 = \frac{1}{4}$ y $x_2 = \frac{1}{4} + (positivo)$, luego $x_1 \le x_2$

Hipótesis de inducción: $x_n \le x_{n+1}$. Veamos que $x_{n+1} \le x_{n+2}$. Para ello:

$$x_n \le x_{n+1} \Rightarrow x_n^{\;2} \le x_{n+1}^{\;2} \Rightarrow \frac{x_n^{\;2}}{2} \le \frac{x_{n+1}^{\;2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{x_n^{\;2}}{2} \le \frac{1}{4} + \frac{x_{n+1}^{\;2}}{2} \Rightarrow x_{n+1} \le x_{n+2}$$

● Está acotada superiormente por 1 si se cumple que: $x_n < 1$ para todo n natural.

Para n=1: $x_1 = \frac{1}{4} < 1$

Hipótesis de inducción: $x_n < 1$. Veamos que $x_{n+1} < 1$. Para ello:

$$x_n < 1 \Rightarrow x_n^{\;2} < 1 \Rightarrow \frac{x_n^{\;2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{x_n^{\;2}}{2} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1$$

2. (2 p.) Calcular el campo de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 \cdot 2^n} \cdot x^{2n}$$

Para calcular el campo de convergencia, aplicando el teorema de Cauchy-Hadamard:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n+2}{n^3 \cdot 2^n}|x|^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n+2}}{\sqrt[n]{n^3} \cdot 2}|x|^2 = \frac{|x|^2}{2} \qquad \left(\sqrt[n]{n} \to 1\right)$$

luego, la serie converge si $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ y, posiblemente, en los extremos.

Para $x = \sqrt{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 \cdot 2^n}\sqrt{2}^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Para $x = -\sqrt{2}$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 \cdot 2^n}(-\sqrt{2})^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

El campo de convergencia es: $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

3. (2 p.) El movimiento de una partícula viene dado por las ecuaciones:

$$f(t) = (2\cos(2t),\ 3\cos t) \quad , t > 0$$

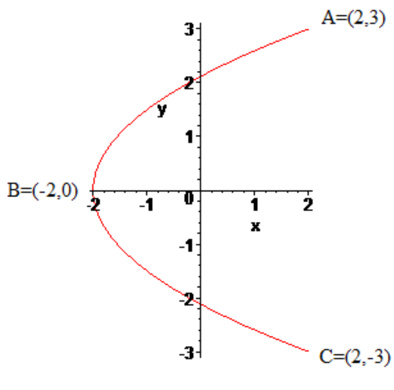
Dar la ecuación cartesiana, dibujar la trayectoria y describir el movimiento.
[Ayuda: $\cos(2t) = \cos^2 t - sen^2 t$]

Para pasar a cartesianas, se debe eliminar el parámetro t y obtener una ecuación en x e y, partiendo de las igualdades: $x = 2\cos(2t)$, $y = 3\cos t$.

$$x = 2\cos(2t) = 2(\cos^2 t - sen^2 t) = 2(\cos^2 t - 1 + \cos^2 t) = 4\cos^2 t - 2 = 4\frac{y^2}{9} - 2$$

La ecuación cartesiana es: $x = 4\dfrac{y^2}{9} - 2$. Por lo tanto es una parábola.

t	P
0	$A=(2,3)$
$\frac{\pi}{2}$	$B=(-2,0)$
π	$C=(2,-3)$
$\frac{3\pi}{2}$	$B=(-2,0)$
2π	$A=(2,3)$



La partícula se mueve sobre la parábola comenzando en el punto A y describiendo el camino de ida y vuelta: ABCBA y sin para nunca.

4. Dada la función: $f(x,y) = 3 + (x^2 + y^2 - 2x)^2 \cdot \cos\dfrac{1}{x^2 + y^2 - 2x}$

a) (1 p.) Representar gráficamente el dominio y extender la función con continuidad a los puntos de la frontera del dominio.
b) (1 p.) Calcular las derivadas parciales en el punto (1,1).

a) El dominio está formado por los puntos del plano excepto los que verifican:

$x^2 + y^2 - 2x = 0$ que, escrito de otra forma, es: $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto es la circunferencia de centro (1,0) y radio 1.

La frontera del dominio es dicha circunferencia. Para extender la función, calculamos el límite en los puntos *(a,b)* que están en la circunferencia: $(a^2 + b^2 - 2a = 0)$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} 3 + (x^2 + y^2 - 2x)^2 \cdot \cos\frac{1}{x^2 + y^2 - 2x} = 3 + [0 \cdot a\cot ada] = 3$$

Definiendo *f (a,b)=3*, *f* es continua en todo el plano.

b) Derivadas parciales en el punto (1,1) :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,1)} = \lim_{x\to 1}\frac{f(x,1) - f(1,1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3 + (x^2 + 1 - 2x)^2 \cdot \cos\dfrac{1}{x^2 + 1 - 2x} - 3}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x^2 + 1 - 2x)^2}{x-1} \cdot \cos\frac{1}{x^2 + 1 - 2x} = [0 \cdot a\cot ada] = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)} = \lim_{y\to 1}\frac{f(1,y) - f(1,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{(1 + y^2 - 2)^2 \cdot \cos\dfrac{1}{1 + y^2 - 2}}{y-1} =$$

$$= \lim_{y\to 1}\frac{(1 + y^2 - 2)^2}{y-1} \cdot \cos\frac{1}{1 + y^2 - 2} = [0 \cdot a\cot ada] = 0$$

5. (2 p.) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y)=\dfrac{x^2+2y^2}{e^{x^2+y^2}}$, en el recinto: $x^2+y^2\leq 4$

El recinto es el círculo de centro (0,0) y radio 2 con borde, por lo tanto es un conjunto cerrado y acotado del plano. Según el Teorema de Wierstrass, como la función es continua es seguro que alcanza máximo y mínimo absolutos en el recinto.

La función es diferenciable en todo el plano porque existen las derivadas parciales y son continuas en todos los puntos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(x,y)}=\frac{2x\cdot e^{x^2+y^2}-(x^2+2y^2)\cdot 2x\cdot e^{x^2+y^2}}{\left(e^{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{2x-(x^2+2y^2)\cdot 2x}{e^{x^2+y^2}}=\frac{2x\cdot(1-x^2-2y^2)}{e^{x^2+y^2}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)}=\frac{4y\cdot e^{x^2+y^2}-(x^2+2y^2)\cdot 2y\cdot e^{x^2+y^2}}{\left(e^{x^2+y^2}\right)^2}=\frac{4y-(x^2+2y^2)\cdot 2y}{e^{x^2+y^2}}=\frac{2y\cdot(2-x^2-2y^2)}{e^{x^2+y^2}}$$

Para calcular los extremos distinguimos dos tipos de puntos: los que están en el interior y los que están en la frontera.

De los que están en el interior, se calculan los que anulan las dos derivadas parciales, para lo cual se resuelve el sistema: $\{\ 2x\cdot(1-x^2-2y^2)=0\ ,\ 2y\cdot(2-x^2-2y^2)=0\ \}$, y se obtienen cinco puntos: (0,0), (1,0), (-1,0), (0,1) y (0,-1).

Para ver los posibles puntos de la frontera del dominio, que es la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2=4$, pasando a una variable se tiene la función:

$$g(x)=\frac{x^2+2\cdot(4-x^2)}{e^{x^2+4-x^2}}=\frac{8-x^2}{e^4}$$, en el intervalo: $-2\leq x\leq 2$.

La derivada de g es: $g'(x)=\dfrac{-2x}{e^4}$ y se anula en x=0, por lo que hay que considerar los puntos: (0,2) y (0,-2).

Además hay que tomar los extremos del intervalo, que dan lugar a los puntos (2,0) y (-2,0).

Para terminar, sólo hay que calcular el valor de la función en los 9 puntos obtenidos y la solución son los valores mayor y menor.

$$f(0,0)=0 \qquad f(\pm 1,0)=\frac{1}{e} \qquad f(0,\pm 1)=\frac{2}{e} \qquad f(\pm 2,0)=\frac{4}{e^4} \qquad f(0,\pm 2)=\frac{8}{e^4}$$

MÍN=0 y MÁX=$\dfrac{2}{e}$