

CALCULO

Examen Final, Primera Parte
19/06/08
Duración 1h 30m

Ejercicio 1 (2 puntos) Determine los límites en el infinito de $y = \sqrt{x^2 + 2x} - x$.

Solución:

Racionalizando y dividiendo por x numerador y denominador resulta

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} + 1}.\end{aligned}$$

Puesto que $x = \sqrt{x^2}$ si $x > 0$ y $x = -\sqrt{x^2}$ si $x < 0$ se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} \\ &= 1\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{-\sqrt{x^2}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1} \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Ejercicio 2 (3 puntos) Analizar la gráfica de la función

$$f(x) = x - x^{1/3}.$$

Solución:

La función está definida para todo x y simétrica respecto del origen ya que

$$f(-x) = -x - \sqrt[3]{-x} = -(x - \sqrt[3]{x}) = f(x).$$

El corte con el eje OY se produce en $y = f(0) = 0$. Los cortes con el eje OX se encuentran en las soluciones de $f(x) = 0$, es decir

$$x - x^{1/3} = 0$$

o bien

$$x^3 = x$$

cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = \pm 1$.

Por otra parte la función es continua para todo x y su comportamiento en el infinito es

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^{1/3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - x^{-2/3}) = +\infty$$

y por simetría

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - x^{1/3}) = -\infty.$$

La derivada en $x \neq 0$ es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{3x^{2/3} - 1}{3x^{2/3}}. \end{aligned}$$

Dicha derivada se anula en

$$3x^{2/3} - 1 = 0$$

es decir en

$$x = \pm \frac{1}{9}\sqrt{3}.$$

Puesto que $f'(x) < 0$ para $0 < x < \sqrt{3}/9$ y $f'(x) > 0$ para $x > \sqrt{3}/9$ la función decrece en el intervalo $(0, \sqrt{3}/9)$ y crece en el intervalo $(\sqrt{3}/9, +\infty)$ existiendo un mínimo local en el punto $x = \sqrt{3}/9$. Por simetría respecto del origen, la función crece en el intervalo $(-\infty, -\sqrt{3}/9)$ y decrece en $(-\sqrt{3}/9, 0)$ con un máximo local en $x = -\sqrt{3}/9$.

En $x = 0$

$$\begin{aligned} f'(0+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - h^{1/3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{3h^{2/3}} \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

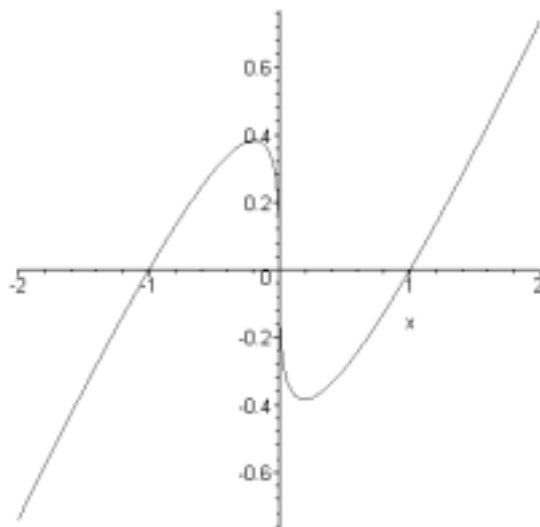
Lo mismo ocurre por la izquierda, luego en $x = 0$ la función posee una tangente vertical.

La derivada segunda es

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{-5/3}$$

para todo $x \neq 0$ por lo que $f''(x) > 0$ si $x > 0$ y $f''(x) < 0$ si $x < 0$. Por consiguiente, la función es cóncava hacia abajo en $x < 0$ y cóncava hacia arriba en $x > 0$.

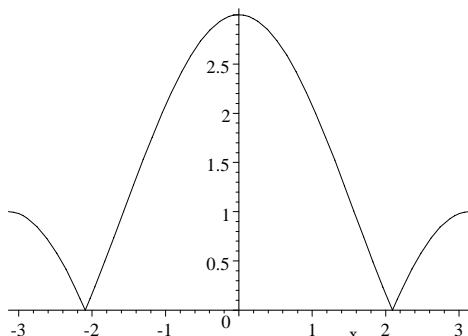
Reuniendo todo lo anterior la gráfica resulta de la forma



Ejercicio 3 (2 puntos) Calcular el valor medio de $f(x) = |2 \cos x + 1|$.

Solución:

Se trata de una función periódica de período 2π y simétrica respecto del eje OY . En el intervalo $[0, \pi]$ la función se anula cuando $\cos x = -1/2$, o sea para $x = 2\pi/3$, siendo $2 \cos x + 1 > 0$ si $0 \leq x < 2\pi/3$ y $2 \cos x + 1 < 0$ si $2\pi/3 < x \leq \pi$. La gráfica de $f(x)$ es



y su valor medio

$$\begin{aligned}
 V_M &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi/3} (2 \cos x + 1) dx + \int_{2\pi/3}^{\pi} (-2 \cos x - 1) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi/3} (2 \cos x + 1) dx - \int_{2\pi/3}^{\pi} (2 \cos x + 1) dx \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[(2 \sin x + x) \Big|_0^{2\pi/3} - (2 \sin x + x) \Big|_{2\pi/3}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[2 \left(\sqrt{3} + \frac{2\pi}{3} \right) - \pi \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 4 (3 puntos) Sea $ABCDE$ el pentágono de vértices $A = (-2, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (4, 4)$, $D = (0, 8)$ y $E = (-4, 4)$. Calcular el volumen del sólido generado al girar dicho pentágono alrededor del eje OX .

Teniendo en cuenta la simetría respecto del eje OY el volumen viene dado por

$$\begin{aligned}
 V &= 2 \int_0^2 \pi y_{DC}^2 dx + 2 \int_2^4 \pi (y_{DC}^2 - y_{BC}^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^4 y_{DC}^2 dx - 2\pi \int_2^4 y_{BC}^2 dx.
 \end{aligned}$$

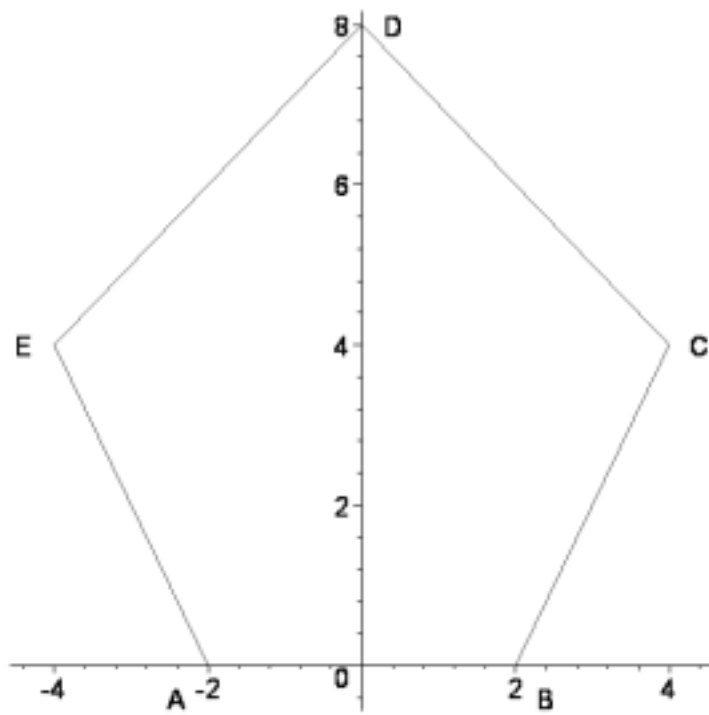


Figure 1:

La ecuación de la recta DC es

$$y - 8 = \frac{4 - 8}{4 - 0}(x - 0)$$

o sea

$$y_{DC} = 8 - x.$$

La ecuación de la recta BC es

$$y - 0 = \frac{4 - 0}{4 - 2}(x - 2)$$

o sea

$$y_{BC} = 2(x - 2).$$

Substituyendo en la expresión del volumen obtenemos

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^4 (8 - x)^2 dx - 2\pi \int_2^4 4(x - 2)^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^4 (64 - 16x + x^2) dx - 8\pi \int_2^4 (x^2 - 4x + 4) dx \\ &= 2\pi \left(64x - 8x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 - 8\pi \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x \right) \Big|_2^4 \\ &= 2\pi \frac{448}{3} - 8\pi \frac{8}{3} \\ &= \frac{832}{3}\pi. \end{aligned}$$