

# CALCULO 11-M-1

## Primera Parte

Duración 1h 45m

**Ejercicio 1 (1.5 puntos)** Una isla  $A$  se encuentra a 3 kilómetros del punto más próximo  $B$  de una costa rectilínea. En la misma costa, a 10 kilómetros de  $B$  se encuentra una central eléctrica  $C$ . Se quiere comunicar la isla y la central mediante un cable que conste de una parte submarina entre la isla y un punto  $X$  de la costa, situado entre  $B$  y  $C$ , y de una parte subterránea entre dicho punto y la central. El coste del cable submarino es de 20 miles de euros por kilómetro y el del cable subterráneo de 12 miles de euros por kilómetro.

1. Encontrar la función que da el coste total del cable necesario para unir la isla y la central en función de la distancia entre los puntos  $B$  y  $X$ .
2. Localizar el punto  $X$  para el cual el coste del cable sea mínimo, indicando dicho coste.

### Solución:

1. Esquema



Expresando el coste en miles de euros y las distancias en kilómetros se obtiene

$$\begin{aligned} C &= 20 \times AX + 12 \times XC \\ &= 20\sqrt{9 + x^2} + 12(10 - x) \end{aligned}$$

estando  $x$  limitada al intervalo  $[0, 10]$ .

2. Derivando  $C$  resulta

$$\begin{aligned} C' &= 20 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - 12 \\ &= \frac{20x - 12\sqrt{9+x^2}}{\sqrt{9+x^2}}. \end{aligned}$$

Igualando a cero se obtiene la ecuación

$$5x - 3\sqrt{9+x^2} = 0.$$

De donde se sigue,

$$5x = 3\sqrt{9+x^2}.$$

Elevando al cuadrado y efectuando operaciones resulta la ecuación equivalente

$$16x^2 - 81 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = \pm \frac{9}{4}.$$

Puesto que la solución negativa no pertenece al intervalo  $[0, 10]$  y la función coste es derivable nos queda un único punto crítico, el  $x = 9/4$ . Como dicha función es continua sabemos que existen máximo y mínimos absolutos. Estos han de encontrarse necesariamente en los puntos críticos o en los extremos del intervalo. Comparando resulta

$$\begin{aligned} C(0) &= 180 \\ C(9/4) &= 168 \\ C(10) &= 20\sqrt{109} > 200. \end{aligned}$$

El mínimo coste se alcanza para  $x = 9/4$  y el máximo coste para  $x = 10$ .

El coste mínimo es

$$C_{\min} = 168000 \text{ euros.}$$

**Ejercicio 2 (1.5 puntos)** Analizar la gráfica de la ecuación

$$y = x^2 e^{-x}.$$

**Solución:**

El dominio es toda la recta real. La función es siempre positiva y corta los ejes coordenados en  $(0, 0)$ . Tampoco es par o impar por lo que no presenta simetrías.

La función es continua en todos los puntos de su dominio y no presenta asíntotas verticales. Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

por lo que  $y = 0$  es asíntota horizontal por la derecha.

La derivada es

$$\begin{aligned} y' &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \\ &= x(2-x)e^{-x} \end{aligned}$$

Por tanto existen dos puntos críticos:  $x = 0$  y  $x = 2$ . La siguiente tabla reúne el signo de la derivada y los intervalos de crecimiento/decrecimiento de la función

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$e^{-x}$	+	+	+
$2 - x$	+	+	-
$x$	-	+	+
$y'$	-	+	-
$y$	↓	↑	↓

por lo que existe un mínimo absoluto en  $x = 0$  y un máximo local en  $x = 2$ . La derivada segunda es

$$\begin{aligned} y'' &= (2-x)e^{-x} - xe^{-x} - x(2-x)e^{-x} \\ &= (2-4x+x^2)e^{-x}. \end{aligned}$$

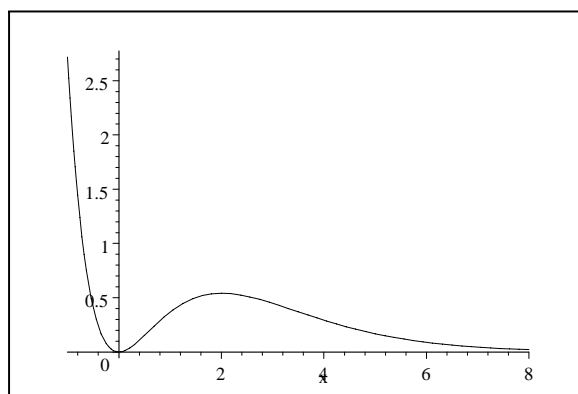
La ecuación  $x^2 - 4x + 2 = 0$  tiene dos raíces reales

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Análisis del signo de la derivada segunda.

	$x < 2 - \sqrt{2}$	$2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$	$2 + \sqrt{2} < x$
$e^{-x}$	+	+	+
$x - 2 + \sqrt{2}$	-	+	+
$x - 2 - \sqrt{2}$	-	-	+
$y''$	+	-	+
$y$	∪	∩	∪

Gráfica



**Ejercicio 3 (2 puntos)** Sea  $R$  la región del plano limitada por las gráficas  $y = x^2 - 2x$  e  $y = 3x$ . Calcular:

1. El volumen del sólido generado al girar la región  $R$  alrededor del eje  $OY$ .
2. El volumen del sólido cuya base es la región  $R$  y sus secciones perpendiculares al eje  $OX$  son triángulos equiláteros.

**Solución:**

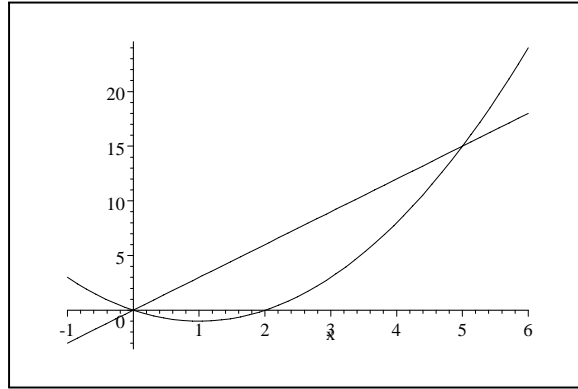
1. La primera curva,  $y_1 = x^2 - 2x$ , es una parábola con vértice en

$$y' = 2x - 2 = 0$$

es decir en  $x = 1$  y cuyos cortes en el eje  $OX$  se encuentran en  $x = 0$  y  $x = 2$ . La segunda gráfica,  $y_2 = 3x$ , corresponde a una recta que pasa por el origen y tiene pendiente 3. Ambas se cortan en

$$x^2 - 2x = 3x \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

o sea en  $x = 0$  y  $x = 5$ . Gráfica de la región  $R$ .



El volumen generado al girar la región  $R$  alrededor del eje  $OY$  es

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^5 2\pi x(y_2 - y_1) dx \\
 &= 2\pi \int_0^5 x(5x - x^2) dx \\
 &= 2\pi \int_0^5 (5x^2 - x^3) dx \\
 &= 2\pi \left( \frac{5x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^5 \\
 &= \frac{625\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

2. En este caso el lado de los triángulos equiláteros es  $l = y_2 - y_1$ . Puesto que el área de un triángulo equilátero de lado  $l$  es

$$A = \frac{1}{2}l(l \sin 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$$

se tiene

$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 A(x) dx \\ &= \int_0^5 \frac{\sqrt{3}}{4} (y_2 - y_1)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^5 (5x - x^2)^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^5 (25x^2 - 10x^3 + x^4) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 25 \frac{x^3}{3} - 10 \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^5 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} x^3 \left( \frac{25}{3} - 10 \frac{x}{4} + \frac{x^2}{5} \right) \Big|_0^5 \\ &= \frac{625\sqrt{3}}{24}. \end{aligned}$$

# CALCULO 11-M-1

## Segunda Parte

Duración 1h 45m

**Ejercicio 4 (1 punto)** Sea  $t = 0.29292929\dots$ . Escriba  $t$  en la forma

$$t = \frac{29}{10^2} + \frac{29}{10^4} + \frac{29}{10^6} + \frac{29}{10^8} + \dots$$

¿De qué tipo de serie se trata? ¿Es convergente? Calcule su suma.

**Solución:**

Escribiendo,

$$t = \frac{29}{10^2} \left( 1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \dots \right)$$

observamos que se trata de una serie geométrica de razón  $r = 10^{-2}$ . Como  $|r| < 1$  la serie es convergente siendo su suma

$$t = \frac{29}{10^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{29}{99}.$$

**Ejercicio 5 (3 puntos)** Dada la curva  $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \cosh t \mathbf{k}$  determinar la ecuación de la recta tangente en  $t = 0$  y la longitud de la curva entre  $t = 0$  y  $t = \pi$ .

**Solución:**

Derivada

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j} + \sinh t \mathbf{k}.$$

Vector tangente en  $t = 0$

$$\mathbf{r}'(0) = 0 \mathbf{i} - 1 \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}.$$

Posición

$$\mathbf{r}(0) = 1 \mathbf{i} - 0 \mathbf{j} + 1 \mathbf{k}.$$

Ecuación de la recta tangente

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y - 0}{-1} = \frac{z - 1}{0}.$$

**Ejercicio 6 (3 puntos)** Sea

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Indicar su dominio y dibujar algunas curvas de nivel. ¿Es posible definir la función en  $(0, 0)$  de tal manera que sea continua?

**Solución:**

El dominio es todo el plano excepto los puntos  $x^2 - y^2 = 0$ , es decir excepto las rectas  $y = x$  e  $y = -x$ .

Las curvas de nivel satisfacen

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = k.$$

Reagrupando resulta

$$(1 - k)x^2 + (1 + k)y^2 = 0$$

o bien

$$y = \pm \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}x.$$

Por lo que se trata de rectas que pasan por el origen para  $k \leq -1$  o  $k \geq 1$ .

La función no posee límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  ya que el límite es diferente por cada una de las rectas. En consecuencia no es posible definir la función en el origen de manera que sea continua.

**Ejercicio 7 (3 puntos)** Considere el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1. Determine la ecuación del plano tangente en un punto  $P = (x_0, y_0, z_0)$  de dicho elipsoide.
2. Plantee un problema de máximos y mínimos que permita determinar el punto  $P$  del elipsoide situado en el primer octante tal que el volumen limitado por el plano tangente y los planos coordenados sea mínimo. Sugerencia: Siendo  $(A, 0, 0)$ ,  $(0, B, 0)$  y  $(0, 0, C)$  los puntos de corte del plano anterior con los ejes coordenados, el volumen es

$$V = \frac{1}{6}ABC$$

3. *Calcular dicho punto y el volumen mínimo.*

**Solución:**

Ver la solución en:

[www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/grupo11m-1/maxmin.pdf](http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/calculo/grupo11m-1/maxmin.pdf)