

SUCESIONES Y LÍMITES ARITMÉTICOS

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites aritméticos:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n} + 2n + 1)}{n^2 + 3}$ ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n$ iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 3} \right)^n$
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + 1}{n - 1} \right)^{(n^2 + 2)/(n - 3)}$ vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$
- vii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n^n}{\ln n!}$ viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2 + n^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n + n^2}} \right)$
- ix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2\sqrt{2} + \dots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$ x) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^p + 3^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, p \in \mathbb{N}$
- xi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{24^n}}{(2n)! \sqrt{n}}$ xii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \sqrt{\frac{n+a}{n-a}}$
- xiii) $\lim_{n \rightarrow \infty} [2 + 3n^4]^{\left(\frac{1}{3 + 2 \ln(n+1)} \right)}$ xiv) $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \right)^2$
- xv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1-n}{1-2n}} \right)^{\frac{1+3n}{2n-1}}$ xvi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\frac{2}{1} \frac{4}{3} \frac{6}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \right)}{\log n^2}$
- xvii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{n+k}{k}}{(n+k)^k}, k \in \mathbb{N}$ xviii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \binom{2n}{n} 4^{-n} \sqrt{n}$ xix) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+na)^2}{n^2 a^2} \right)^n, a \neq 0.$

Ejercicio 2. Probar que la sucesión recurrente $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, con $x_1 = \sqrt{2}$ es convergente y calcular su límite.

Ejercicio 3. Sea la sucesión recurrente $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$, con $a_1 = 1$. Probar que es convergente y calcular su límite.

Ejercicio 4. Dada la sucesión recurrente $x_{n+1} = \frac{1}{4} + x_n^2$, con $x_1 = a \in \mathbb{R}$, determinar para qué valores del parámetro a es $\{x_n\}$ convergente.

Ejercicio 5. Dada la sucesión recurrente $x_n = \sqrt{1 + 2x_{n-1}} - 1$, con $x_0 = a \in (0, \infty)$, calcular su límite, si existe.

Ejercicio 6. Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, dada por $a_n = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+n}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, y que se cumple que $L \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Ejercicio 7. Calcular, pasando a integrales, los siguientes límites:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + (n-1)^2} \right]$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right]$