

## NÚMEROS REALES

**Ejercicio 1.** Transformar las siguientes expresiones en otras equivalentes que no contengan valores absolutos:

$$\text{i) } |x| + |x - 1| \quad \text{ii) } \frac{|x - 1|}{|x + 8|} \quad \text{iii) } |x^2 - 2| + x$$

$$\text{iv) } x - |x - |x|| \quad \text{v) } ||x| - 1| \quad \text{vi) } |x| - |x|^2$$

**Solución:**

i) Se cumple que

$$|x| + |x - 1| = \begin{cases} x + (x - 1) = 2x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x + (1 - x) = 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ -x + 1 - x = 1 - 2x & \text{si } 0 \leq x. \end{cases}$$

ii) Se tiene que

$$\frac{|x - 1|}{|x + 8|} = \begin{cases} \frac{x - 1}{x + 8} & \text{si } x > 1 \\ \frac{1 - x}{x + 8} & \text{si } -8 < x \leq 1 \\ \frac{x - 1}{x + 8} & \text{si } x < -8. \end{cases}$$

iii) Se cumple que

$$|x^2 - 2| + x = \begin{cases} x + x^2 - 2 & \text{si } x > \sqrt{2} \\ x + 2 - x^2 & \text{si } x \leq \sqrt{2}. \end{cases}$$

iv) Se tiene que

$$x - |x - |x|| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 3x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

v) Se cumple que

$$||x| - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ -x - 1 & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

vi) Se tiene que

$$|x| - |x|^2 = |x|(1 - |x|) = \begin{cases} x(1 - x) & \text{si } x \geq 0 \\ -x(1 - x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

**Ejercicio 2.** Resolver las siguientes ecuaciones:

$$\text{i) } |x^2 + x - 6| = 2 \quad \text{ii) } |x - 1||x^2 + x + 1| = 0 \quad \text{iii) } |x - 1| = |x - 4|$$

**Solución:**

- i) Se tiene que  $|x^2 + x - 6| = |x + 3| |x - 2|$ . Estudiando los distintos casos que pueden darse:  $2 < x$ ,  $-3 < x < 2$ ,  $x < -3$ . Resolviendo las ecuaciones de segundo grado que aparecen:  $x^2 + x - 8 = 0$ ,  $x^2 + x - 4$  y  $x^2 + x - 8 = 0$ . Resultan los siguientes valores

$$\left\{ \frac{-1 - \sqrt{33}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{33}}{2} \right\}.$$

- ii) Como  $x^2 + x + 1 = 0$  no tiene raíces reales, la única solución es  $x = 1$ .
- iii) Consideramos los tres casos posibles  $x < 1$  ó  $1 < x < 4$  ó  $4 < x$ . Ni  $x < 1$ , ni  $x > 4$  dan resultados compatibles. La única solución posible proviene de  $x - 1 = 4 - x$ ,  $2x = 5$ , por tanto  $x = 5/2$ .

**Ejercicio 3.** Resolver las siguientes desigualdades y representar el resultado en la recta real:

- i)  $|x| < 1$       ii)  $|x - 1| + |x + 1| < 1$       iii)  $|3x + 1| \geq 1$       iv)  $|x^2 - x| > 1$   
v)  $|x + 4| < 2$       vi)  $|x + 1| < |x - 3|$       vii)  $|x - 3| = 8$       viii)  $|9 - 2x| < 1$   
ix)  $|x - 3| < 5$       x)  $|x + 3| - |x - 1| < 2$       xi)  $|x - 1| |x + 2| = 3$

**Solución:** Veamos primero las inmediatas.

- i)  $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ .
- v)  $|x + 4| < 2 \Leftrightarrow -2 < x + 4 < 2 \Leftrightarrow -6 < x < -2$ .
- vii)  $|x - 3| = 8 \Leftrightarrow x - 3 = 8 \wedge x - 3 = -8 \Leftrightarrow x = 11 \wedge x = -5$ .
- viii)  $|9 - 2x| < 1 \Leftrightarrow -1 < 9 - 2x < 1 \Leftrightarrow -10 < -2x < -8 \Leftrightarrow 10 > 2x > 8 \Leftrightarrow 4 < x < 5$ .
- ix)  $|x - 3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x - 3 < 5 \Leftrightarrow -2 < x < 8$ .

Las que siguen también son sencillas.

- ii) Se tiene que

$$|x - 1| + |x + 1| = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

Por tanto  $|x - 1| + |x + 1| > 1$ . Luego

$$\{x | x \in \mathbb{R} \wedge |x - 1| + |x + 1| < 1\} = \emptyset.$$

- iii) Por un lado si  $3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 < 3x \Leftrightarrow \frac{-1}{3} \leq x$ , tendremos que  $3x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ .

La otra posibilidad, es decir si  $x < \frac{-2}{3}$  implica que  $3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -3x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{-2}{3}$ , por tanto la solución es

$$|3x + 1| \geq 1 \iff \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right] \cup [0, +\infty).$$

- iv)  $|x^2 - x| > 1 \Leftrightarrow |x(x - 1)| > 1$ , los cambios de signo se producen en  $x = 0$  y  $x = 1$ . Si  $x > 1$  tendremos  $x^2 - x > 1$ , es decir  $x^2 - x - 1 > 0$ . Como  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , eso nos conduce a que  $x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Por otro lado es claro que si  $0 \leq x \leq 1$  no se cumple la condición de partida. Veamos finalmente que pasa si  $x < 0$ . En ese caso  $-x(1 - x) > 1$ , es decir  $x^2 - x - 1 > 0$ , pero como  $x < 0$ , necesariamente  $x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Por tanto

$$|x^2 - x| > 1 \iff \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

- vi) En  $|x + 1| < |x - 3|$ , si  $x > 3$  tendremos que  $x + 1 < x - 3$  que nos lleva a  $1 < -3$  que es absurdo. Si  $x < -1$  tendremos que  $-1 - x < 3 - x$  y tenemos que  $0 < 4$  que es compatible. Finalmente si  $-1 < x < 3$  tenemos que  $x + 1 < 3 - x$  luego  $2x < 2$  y en consecuencia  $x < 1$ . Por tanto

$$\{x | x \in \mathbb{R} \wedge |x + 1| < |x - 3|\} = (-\infty, 1).$$

- x) Se cumple que

$$|x + 3| - |x - 1| = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq -3 \\ 2x + 2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Por tanto para que  $|x + 3| - |x - 1| < 2$ , tiene que verificarse que  $2x + 2 < 2$ , en consecuencia  $x < 0$ . Luego

$$\{x | x \in \mathbb{R} \wedge |x + 3| - |x - 1| < 2\} = (-\infty, 0).$$

- xi) Tendremos que  $|x - 1| |x + 2| = 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \pm 3$ . Que nos lleva a  $x^2 + x - 5 = 0 \vee x^2 + x + 1 = 0$ . Pero como sabemos que  $x^2 + x + 1 > 0$ , solo nos queda la otra posibilidad. Por tanto

$$\{x : |x - 1| |x + 2| = 3\} = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right\}.$$

**Ejercicio 4.** Probar que para cualesquiera  $a, b \in \mathbb{R}$ , se tiene

$$ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

**Solución:**

Es inmediata

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \iff 2ab \leq a^2 + b^2 \iff ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

**Ejercicio 5.** Representar en  $\mathbb{R}^2$ :

- i)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$       ii)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |3x - 1| \geq y\}$   
 iii)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + 1| + |x - 3| < y\}$       iv)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 - x| + x > y\}$

**Solución:**

- i) Si llamamos  $\Omega$  a la región correspondiente, se tiene que

$$\Omega = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge -1 < x < 1\}.$$

- ii) La condición  $|3x - 1| \geq y$ , nos conduce por un lado si  $x \geq \frac{1}{3}$  a que  $3x - 1 \geq y$ . Si por otro lado  $x < \frac{1}{3}$ , entonces  $1 - 3x \geq y$ . Luego la región pedida es la parte del plano situada por debajo de la recta  $y = 3x - 1$  unida a la región situada por debajo de la recta  $y = 1 - 3x$ .

- iii) Se cumple que

$$|x + 1| + |x + 3| = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } x \leq -3 \\ 2 & \text{si } -3 \leq x \leq -1 \\ 2x + 4 & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

Luego la región pedida es la intersección de las regiones que estén por encima de las rectas  $y = -2x - 4$ ,  $y = 2$ ,  $y = 2x + 4$ .



vii)  $A = \{3^{-m} + 5^{-n} + 7^{-q} \mid m, n, q \in \mathbb{Z}\}$ , luego

$$\inf(A) = 0, \quad \sup(A) = \text{No existe}, \quad \min(A) = \text{No existe}, \quad \max(A) = \text{No existe}.$$

**Ejercicio 7.** Calcular cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

- |   |   |
|---|---|
| i) $\{2, 2.2, 2.22, 2.222, \dots\}$                             | ii) $\mathbb{Z}$  |
| iii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$            | iv) $\{r \in \mathbb{Q} \mid 2r^3 - 1 < 15\}$           |
| v) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x^2 + x < 2\}$ | vi) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x < 0\}$            |
| vii) $\{1, 2, 3, \pi\}$   | viii) $\{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$       |
| ix) $\{r \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$          | x) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 4x - 5 < 0\}$         |
| xi) $\{1, 1.1, 0.9, 1.11, 0.99, \dots\}$                        | xii) $\{-0.9, 0.9, -0.99, 0.99, -0.999, 0.999, \dots\}$ |

**Solución:**

i) Tenemos que  $A = \{2, 2.2, 2.22, 2.222, \dots\}$ , y como sabemos que  $A'BPPPP\dots = \frac{ABP - AB}{99 \dots \overset{n}{9} 00 \dots \overset{m}{9} 0}$ , luego  $2'222\dots = \frac{22 - 2}{9} = \frac{20}{9}$ . Por tanto

$$\inf(A) = \min(A) = 2, \quad \sup(A) = \frac{20}{9}, \quad \max(A) = \text{No existe}.$$

ii) Este caso  $A = \mathbb{Z}$  es trivial ya que

$$\min(A) = \text{No existe}, \quad \max(A) = \text{No existe}, \quad \inf(A) = \text{No existe}, \quad \sup(A) = \text{No existe}.$$

iii) Si  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 < 0\}$ , resolvemos el polinomio  $x^2 + 5x - 6 = 0$ , tendremos que

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \implies x = \frac{-5 \pm 7}{2} = \begin{cases} -6 \\ 1 \end{cases}$$

Como para  $x = 0$  el polinomio toma un valor negativo resultará que

$$\inf(A) = \min(A) = -6, \quad \sup(A) = \max(A) = 1.$$