

# Resultados para el cálculo de límites aritméticos

**Definición 1.1.** (semifactoriales) Sea  $n \in \mathbb{N}$ , notaremos

$$m!! = \begin{cases} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots (m-2) \cdot m & \text{si } m \text{ es par,} \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (m-2) \cdot m & \text{si } m \text{ es impar.} \end{cases}$$

**Proposición 1.1.** (trivial)

Se cumplen las dos relaciones siguientes

$$(2n)!! = 2^n n! \quad \text{y} \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

**Proposición 1.2.** (pág. 438 tomo II Spivak)

Se cumple  $\forall x \in \mathbb{R}$  que  $x < e^x$  y  $\forall x \in \mathbb{R}_+$  se verifica  $\ln(x) < x$ .

**Proposición 1.3.** (división polinómica para racionalizar ciertos cocientes)

Se cumple que

$$x - a = \frac{x^n - a^n}{x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}}.$$

**Proposición 1.4.** (fórmula de Stirling, pág. 319 Burgos)

Sea  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\begin{aligned} n! &\approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (n! - n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}) &= 0 \quad (n = 10, \text{ error} = 1\%). \end{aligned}$$

**Proposición 1.5.** (pág. 37 Burgos)

Se cumplen las tres implicaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\log_a b_n) = \log_a (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \text{ y } a > 0 &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} a^{b_n} = a^{(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b &\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^{(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)}. \end{aligned}$$

**Proposición 1.6.** (se prueba mediante Taylor)

Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ , entonces se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n (a_n - 1)}.$$

**Proposición 1.7.** (pág. 40 Burgos)

Se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

**Teorema 1.1.** (teorema de Stolz, pág. 40 Burgos)

Sean  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  sucesiones de números reales tales que

- i)  $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,
- ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n) = +\infty$ ,
- iii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L, L \in \overline{\mathbb{R}}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

**Proposición 1.8.** (criterio<sup>1</sup> de la media aritmética)

Sea  $\{a_n\}$  una sucesión tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a.$$

**Proposición 1.9.** (criterio de razón y raíz)

Sea  $\{a_n\}$  tal que  $a_n > 0$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

**Proposición 1.10.** (criterio de la media geométrica)

Sea  $\{a_n\}$  una sucesión tal que  $a_n > 0, \forall n$ , y además  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a.$$

---

<sup>1</sup>Estos criterios son corolarios del teorema de Stolz. Bastaría escoger  $A_n$  y  $B_n$  adecuadamente para probarlos por ese procedimiento, sin embargo hemos preferido demostrarlos sin utilizar aquel teorema.