PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Ejercicio 1. Demostrar utilizando el método de inducción las siguientes fórmulas:

i) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

ii) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) = n^2$.

iii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

iv) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$.

v) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

vi) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

vii) Probar la desigualdad de Bernoulli. Sea $a \geq -1$ entonces se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ que $(1+a)^n \geq 1 + na$.

viii) Probar que $n! > 2^n$ (siendo n mayor que 3).

ix) Suponiendo que $a, b, n \in \mathbb{N}$ probar que $a^n - b^n$ es múltiplo de $a - b$.

x) Todos los números de la forma $3^{2n} - 1$ son múltiplos de 8.

xi) Probar que $2n^3 - 3n^2 + n + 31$ es siempre un número positivo.

xii) La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica de razón r es:

$$a_1 \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad \text{siendo } a_1 \text{ el primer término.}$$

xiii) Probar que $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}.$$

Ejercicio 2. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\cos x \;\; \cos 2x \;\; \cos 2^2 x \;\; \cdots \;\; \cos 2^{n-1} x = \frac{\operatorname{sen} 2^n x}{2^n \operatorname{sen} x}.$$

Ejercicio 3. Probar que $\forall x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple :

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|.$$

Ejercicio 4. Demostrar la fórmula de Moivre.

Ejercicio 5. Demostrar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$