

NÚMEROS COMPLEJOS

Ejercicio 1. Indicar sobre el plano complejo las regiones cuyos puntos satisfacen las siguientes ecuaciones:

- i) $|z - z_0| \geq R$ ii) $|z - 2| + |z + 2| = 5$ iii) $|z - 2| - |z + 2| = 3$
 iv) $|z - z_1| = |z - z_2|$ v) $\Re(z) \geq 0$ vi) $\Im(z) < 0$
 vii) $0 < \Re(iz) < 1$ viii) $\alpha < \arg(z) < \beta$ ix) $|z| = \Re(z) + 1$

Ejercicio 2. Expresar en forma polar:

- i) $3 + 3i$ ii) $-1 + \sqrt{3}i$ iii) -1 iv) $-2 - 2\sqrt{3}i$

Ejercicio 3. Calcular:

- i) $(3 - i) + (1 + i)$ ii) $(4 - 2i) + (-6 + 5i)$ iii) $(2 - i) - (1 - i)$
 iv) $(-7 + 3i) - (2 - 4i)$ v) $(3 - i)(1 + i)$ vi) $(3 - 2i)(1 + 3i)$
 vii) $(1 + i)(2 - i)(1 - i)$ viii) $\frac{3 - i}{1 + i}$ ix) $\frac{-5 + 5i}{4 - 3i}$
 x) $\frac{1 + i}{(1 - i)^2}$ xi) $\frac{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}{1 + i}$ xii) $\frac{3 + 2i}{2 + 3i}$
 xiii) $\left| \frac{1}{1 + 3i} - \frac{1}{1 - 3i} \right|$ xiv) $3\frac{\pi}{2} 2\frac{\pi}{4}$ xv) $\frac{3\frac{\pi}{2}}{2\frac{\pi}{4}}$

Ejercicio 4. Hallar $z \in \mathbb{C}$ sabiendo que $\bar{z} + \bar{w} = 2 + 3i$ y $w = 3 + i$.

Ejercicio 5. Calcular $(1 + i)^{20}$.

Ejercicio 6. Calcular i^n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 7. Representar $(1 + i), (1 + i)^2, (1 + i)^3, \dots$

Ejercicio 8. Hallar todos los valores de las siguientes raíces:

- i) $\sqrt[3]{1}$ ii) $\sqrt[3]{i}$ iii) $\sqrt[4]{-1}$ iv) $\sqrt{1 - i}$ v) $\sqrt[3]{1 + i}$ vi) $\sqrt[6]{1 - \sqrt{3}i}$

Ejercicio 9. Representar $\sqrt[n]{i}, n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10. Sea $p \in \mathbb{N}$. Resolver en z la ecuación

$$\sum_{k=0}^{4p} i^k = z^p.$$

Ejercicio 11. Encontrar las soluciones de $z^3 + 8 = 0$ que caen dentro del recinto del plano complejo definido por $|z + 1| < 2$.

Ejercicio 12. Sabiendo que los puntos $(0, 0)$ y $(3, -1)$ son dos vértices consecutivos de un cuadrado, hallar las coordenadas de los otros dos sabiendo que son de ordenada positiva.

Ejercicio 13. Sabiendo que $1 + i$ es solución de $z^4 - 4z^3 + 5z^2 - 2z - 2 = 0$, calcular las restantes raíces.

Ejercicio 14. Sabiendo que $z = i$ es solución de $z^7 + z^5 - z^2 - 1 = 0$, hallar todas las raíces del polinomio.

Ejercicio 15. Estudiar si la ecuación $ax^5 + bx^4 + cx^3 - ix^2 - i = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, tiene soluciones reales.