Tema 1

Conjuntos de números y sucesiones

1.1 Números reales

Teorema 1.1.1. *(principio de inducción)*
Sea $P(n)$ una relación cuya verdad o falsedad dependen de n, y se cumplen:

i) *$P(1)$ es verdad.*

ii) *Si $P(k)$ es verdad, entonces $P(k+1)$ es verdad, sea cual sea $k \in \mathbb{N}$.*

Entonces $P(n)$ es cierto $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.1. *Se dice que dos conjuntos A y B son coordinables o equipotentes, cuando puede establecerse una aplicación biyectiva entre ambos.*

Definición 1.1.2. *(Dedekind, 1872) Diremos que un conjunto A es infinito cuando es equipotente a una parte propia*[1] *de si mismo.*

Definición 1.1.3. *Diremos que un conjunto infinito es numerable cuando es equipotente a $\mathbb{N}$.*

Proposición 1.1.1. *$\mathbb{Q}$ es numerable.*

Proposición 1.1.2. *El conjunto resultante de la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Proposición 1.1.3. *El conjunto $[0,1] = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge 0 \leq x \leq 1\}$ es no numerable.*

Corolario 1.1.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces $[a,b]$ es no numerable.*

Definición 1.1.4. *Para extender la noción de "número" de elementos de un conjunto al caso general asociaremos, siguiendo a George Cantor, a cada conjunto X un nuevo objeto que se denota por card(X) y que se llamara cardinal o potencia de X, y que se define de manera que satisfaga la condición siguiente:* Para que dos conjuntos X e Y sean equipotentes es necesario y suficiente que $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$.

[1] Se dice que $B \subset A$ es una parte propia de A si $B \neq A$.

Definición 1.1.5. *Diremos que un número real es irracional si no puede expresarse como cociente de dos enteros.*

Proposición 1.1.4. $\sqrt{2}$ *es irracional.*

Corolario 1.1.2. *Si* $m, n \in \mathbb{Z}^*$ *entonces* $\dfrac{m}{n}\sqrt{2}$ *es irracional.*

Definición 1.1.6. *(de cuerpo) La terna* $(M, +, \cdot)$ *formada por un conjunto y dos leyes de composición, se dice que es un cuerpo, si y solo si, se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $(M, +, \cdot)$ *es anillo.*

   1.1 $(M, +, \cdot)$ *es grupo abeliano.*

   - 1.1.1 *Asociatividad del* $+$*, se cumple:* $a + (b + c) = (a + b) + c, \ \ \forall a, b, c \in M.$
   - 1.1.2 *Conmutatividad del* $+$*, se cumple:* $a + b = b + a, \ \ \forall a, b \in M.$
   - 1.1.3 *Existencia del neutro:* $\exists! \ \overline{0} \in M$ *tal que* $a + \overline{0} = \overline{0} + a = a, \ \ \forall a \in M.$
   - 1.1.4 *Existencia del opuesto:* $\forall a \in M, \ \ \exists! \ b \in M \ \ (b \equiv (-a))$ *tal que* $a + b = b + a = \overline{0}.$

   1.2 *Asociatividad del* $\cdot$*, es decir:* $a(bc) = (ab)c, \ \ \forall a, b, c \in M.$

   1.3 *Distributividad por la derecha y por la izquierda:*

   - 1.3.1 $a(b + c) = ab + ac, \ \ \forall a, b, c \in M.$
   - 1.3.2 $(a + b)c = ac + bc, \ \ \forall a, b, c \in M.$

2. $(M, +, \cdot)$ *es anillo conmutativo:* $ab = ba$*,* $\forall a, b \in M.$

3. $(M, +, \cdot)$ *es anillo unitario:* $\exists! \ \overline{1} \in M$ *tal que* $a\overline{1} = \overline{1}a = a$*,* $\forall a \in M.$

4. *Existencia del inverso:* $\forall a \in M^* \ \ \exists! \ b \in M \ (b \equiv a^{-1})$ *tal que* $ab = ba = \overline{1}.$

5. *El cuerpo debe tener por lo menos dos elementos:* $\overline{0} \neq \overline{1}.$

Definición 1.1.7. *(de cuerpo ordenado)*
Diremos que un cuerpo $(M, +, \cdot)$ *es ordenado, si y solo si, existe un subconjunto* $P \subset M$ *con las siguientes propiedades:*

I) *Se verifica una y solo una de las siguientes cláusulas:*

   i) $a \in P$

   ii) $-a \in P$

   iii) $a = 0.$

II) *Si* $a \in P$ *y* $b \in P$*, entonces* $a + b \in P.$

III) *Si* $a \in P$ *y* $b \in P$*, entonces* $a \cdot b \in P.$

Definición 1.1.8. *(de* $<$*)*
Sea $(M, +, \cdot)$ *cuerpo ordenado, diremos que* $a < b$*, si y solo si,* $b - a \in P$*; diremos que* $a \leq b$*, si y solo si,* $b - a \in P$ *o* $a = b$*.*

Proposición 1.1.5. *(propiedades de los cuerpos ordenados) Sea* $(M, +, \cdot)$ *cuerpo ordenado, se cumplen las siguientes propiedades:*

1) $a \leq b$ *y* $b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b$.

2) $a \leq b$ *y* $b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c$.

3) $\forall a, b \in M$ *se cumple* $a \leq b$ *o* $b \leq a$.

4) $a \leq b$, $\forall c \in M$ *se cumple* $a + c \leq b + c$.

5) $a \leq b$, $\forall c \geq 0$, *se cumple* $ac \leq bc$.

Definición 1.1.9. *(de cotas y conjuntos acotados)*

Sea $(M, +, \cdot)$ *cuerpo ordenado y* $A \subset M$ *un subconjunto suyo, diremos que* $k \in M$ *es cota superior de* A *(o lo que es lo mismo, que* A *está acotado superiormente por* k*), si y solo si,* $\forall x \in A$ *se cumple que* $x \leq k$*. Obsérvese que en ningún caso estamos afirmando que ese* k *tenga necesariamente que existir. Análogamente diremos que* $k' \in M$ *es cota inferior de* A *(o lo que es lo mismo, que* A *está acotado inferiormente), si y solo si,* $\forall x \in A$ *se cumple que* $k' \leq x$.

Un subconjunto A *de un cuerpo ordenado se dice que está acotado si lo está superior e inferiormente.*

Definición 1.1.10. *(de máximo y mínimo) Sea* $(M, +, \cdot)$ *cuerpo ordenado y* $A \subset M$*, llamaremos máximo del subconjunto* A*, al elemento* $a \in A$*, cuando exista, tal que* $\forall x \in A$*, se cumple* $x \leq a$.

Análogamente llamaremos mínimo del subconjunto A *al elemento* $a' \in A$*, cuando exista, tal que* $\forall x \in A$, $a' \leq x$.

Definición 1.1.11. *(de supremo e ínfimo)*

Sea $(M, +, \cdot)$ *cuerpo ordenado y* $A \subset M$*, llamaremos supremo de* A*, a la menor de las cotas superiores de* A*, cuando exista. Lo notaremos como* $\sup(A)$*. Análogamente llamaremos ínfimo de* A*, a la mayor de las cotas inferiores de* A*, cuando exista, y se le representará por* $\inf(A)$.

Definición 1.1.12. *Si se cumple que todos los subconjuntos acotados de un cuerpo ordenado, tienen supremo e ínfimo, diremos de ese cuerpo que es ordenado y completo.*

Teorema 1.1.2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *es cuerpo ordenado completo y además es el único que existe salvo isomorfismos.*

Proposición 1.1.6. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ *tal que* $na > b$.

Corolario 1.1.3. *Sea* $a \in \mathbb{R}$ *y* $a > 0$*, entonces existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $0 < \frac{1}{n} < a$.

Proposición 1.1.7. *Entre dos reales cualesquiera siempre existen racionales.*

Proposición 1.1.8. *Entre dos números reales siempre existen irracionales.*

Definición 1.1.13. *Sea* $a \in \mathbb{R}$*, llamaremos valor absoluto de* a*, a*

$$|a| = \begin{cases} a & si \quad a \geq 0 \\ -a & si \quad a < 0 \end{cases}$$

Proposición 1.1.9. *(propiedades del valor absoluto) Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*, se cumplen:*

i) $|a| = |-a|$.

ii) $|ab| = |a|\ |b|$.

iii) *Si* $c > 0$*;* $|a| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq a \leq c$.

iv) $-|a| \leq a \leq |a|$.

v) $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Definición 1.1.14. *(de intervalos en* $\mathbb{R}$*) Sean* $a, b \in \mathbb{R}$*, con* $a < b$*, llamaremos:*

$$\begin{array}{rcl} [a, b] & = & \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x \leq b\} \\ [a, b) & = & \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a \leq x < b\} \\ (a, b] & = & \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x \leq b\} \\ (a, b) & = & \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x < b\} \\ (-\infty, b] & = & \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \leq b\} \\ (a, +\infty) & = & \{x | x \in \mathbb{R} \wedge a < x\}. \end{array}$$

Teorema 1.1.3. *Sean* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *y* $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$*, entonces se verifica*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Corolario 1.1.4. *(desigualdad de Minkowski discreta con* $p = 2$*) Sean* $a_i, b_i \in \mathbb{R}$*, con* $i = 1, 2, 3, \ldots, n$*, entonces se cumple que*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

1.2 Números Complejos

Definición 1.2.1. *(Hamilton, 1833) Sea* $\mathbb{C} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, definimos la estructura* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$*, donde*

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}, \quad \textit{tal que} \quad (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \\ \cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}, \quad \textit{tal que} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \end{array}$$

Proposición 1.2.1. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es cuerpo.*

Proposición 1.2.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *no es cuerpo ordenado.*

Proposición 1.2.3. *Sea* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *el cuerpo complejo, y sea* $A = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$*, entonces se verifica:*

i) $(A,+,\cdot)$ *es subcuerpo de* $(\mathbb{C},+,\cdot)$*, siendo* $+$ *y* $\cdot$ *restricciones a* A *de las operaciones en* $\mathbb{C}$*.*

ii) $(A,+,\cdot)$ *es isomorfo*[2] *a* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*, mediante* $\psi((a,0)) = a$*.*

Definición 1.2.2. *(forma binómica)*
Definiremos $i \equiv (0,1)$*,* $1 \equiv (1,0)$*, supuesta conocida la estructura de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *como* $\mathbb{R}$*–espacio vectorial, es claro que*

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) = a + bi.$$

Esta definición conlleva que $(0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$*. Luego* $i^2 = -1$*, por consiguiente* $i = \sqrt{-1}$*.*

Definición 1.2.3. *(conjugado) Sea* $z = a + bi$*, se llama conjugado de* z *y se representa por* $\overline{z}$*, al complejo* $a - bi$*, es decir* $\overline{z} = a - bi$*.*

Definición 1.2.4. *(parte real, imaginaria y módulo)*
Sea $z = a + bi$*, se llama parte real de* z *y se representa por* $Re(z) = a$*, al primer elemento del par* (a,b)*, análogamente se llama parte imaginaria de* z*,* $Im(z) = b$*, al segundo elemento de* (a,b)*. Se denomina módulo del complejo* z*, y se representa por* $|z|$*, al número real no negativo* $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$*.*

Proposición 1.2.4. *(propiedades del conjugado) Sean* $z, w \in \mathbb{C}$*, se cumplen las siguientes propiedades:*

i) $\overline{\overline{z}} = z$*.*

ii) $z = \overline{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0$*.*

iii) $\overline{-z} = -\overline{z}$*.*

iv) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$*.*

v) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$*.*

vi) Si $z \neq 0$*,* $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$*.*

Proposición 1.2.5. *(propiedades del módulo) Sean* $z, w \in \mathbb{C}$*, se cumplen:*

i) $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$*.*

ii) $|\overline{z}| = |z|$ *y* $|-z| = |z|$*.*

iii) $|Re(z)| \leq |z|$ *y* $|Im(z)| \leq |z|$*,* $|z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$*.*

iv) $|z|^2 = z\overline{z}$*.*

v) $|zw| = |z|\,|w|$*.*

vi) Si $z \neq 0$*,* $|z^{-1}| = (|z|)^{-1}$*.*

[2]Se dice que dos cuerpos $(L,\oplus,\otimes)$ y $(M,+,\times)$, son isomorfos, si y solo si, existe una biyección $\psi : L \longrightarrow M$ tal que $\forall x,y \in L$, i) $\psi(x \oplus y) = \psi(x) + \psi(y)$, ii) $\psi(x \otimes y) = \psi(x) \times \psi(y)$.

vii) $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Definición 1.2.5. *(argumento y argumento principal)*

Sea un complejo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, *y tal que* $z = a + bi$, *de las propiedades del módulo se deducen* $-|z| \leq Re(z) \leq |z|$ *y* $-|z| \leq Im(z) \leq |z|$, *por tanto dividiendo por* $|z|$, *tendremos* $-1 \leq \frac{Re(z)}{|z|} \leq 1$ *y* $-1 \leq \frac{Im(z)}{|z|} \leq 1$. *Además* $(\frac{Re(z)}{|z|})^2 + (\frac{Im(z)}{|z|})^2 = 1$, *por consiguiente el sistema de ecuaciones* $\begin{cases} \operatorname{sen}\theta & = & \frac{Im(z)}{|z|} \\ \cos\theta & = & \frac{Re(z)}{|z|}, \end{cases}$ *tiene solución. Llamaremos* $\theta = \arg(z)$ *a cualquiera de los valores que sean solución de ambas ecuaciones. Al único valor* $\theta \in [0, 2\pi)$ *que las satisface le llamaremos* $Arg(z)$, *o argumento principal. Se cumple que* $\arg z = Arg(z) + 2k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.2.6. *(forma polar o modulo–argumental)*

Las expresiones $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{|z|}$ *y* $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}$, *permiten determinar* $|z|$ *y* $Arg(z)$, *a partir de* $(a,b) \in \mathbb{C}^*$. *Recíprocamente* $a = |z|\cos\theta$ *y* $b = |z|\operatorname{sen}\theta$, *nos permiten obtener* (a,b) *conociendo el par* $(|a|, Arg(z))$, *que llamaremos forma polar del complejo* (a,b). *En textos de carácter técnico se escribe a veces* $|z|_{Arg(z)}$.

Definición 1.2.7. *(forma trigonométrica) Sea* $z = a + bi$, *como* $a = |z|\cos\theta$ *y* $b = |z|\operatorname{sen}\theta$, *podemos escribir* $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, *que se conoce como forma trigonométrica de un complejo.*

Proposición 1.2.6. *(propiedades del argumento)*

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, *entonces se verifica*

i) $\arg\overline{z} = -\arg z + 2k\pi$.

ii) $\arg(zw) = \arg z + \arg w + 2k\pi$.

iii) Sea $w \neq 0$, $\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w + 2k\pi$.

iv) Sea $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\arg(z^n) = n\arg z + 2k\pi$.

Teorema 1.2.1. *Sea* $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta).$$

Definición 1.2.8. *Sea* $z \in \mathbb{C}^*$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *se dice que* $w \in \mathbb{C}$, *es raíz n–ésima de* z, *si y solo si,* $w^n = z$.

Proposición 1.2.7. *Sea* $z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \neq 0$, *y* $n \in \mathbb{N}$, *existen* n *raíces* n*–ésimas distintas de* z, *que vienen dadas por*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i\operatorname{sen}\varphi_k),$$

siendo

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Definición 1.2.9. *Definimos* $e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tal que si* $z = a + bi$*, entonces* $e^z = e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b)$*. Entendiendo que el* e^a*, que aparece a la derecha, es la exponencial de argumento real, utilizada hasta ahora. De esta definición se desprenden tres propiedades inmediatas,* $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^0 &= e^{0+0i} = e^0(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 1, \\ e^1 &= e^{1+0i} = e^1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e, \\ e^x &= e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = e^x. \end{aligned}$$

Proposición 1.2.8. *(propiedades presumibles de* e^z*) Sean* $z, w \in \mathbb{C}$*, entonces se cumplen:*

i) $e^{z+w} = e^z e^w$.

ii) $e^z \neq 0, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

iii) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

iv) $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$.

Teorema 1.2.2. *(fórmula de Euler) Sea* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces*

$$e^{\alpha i} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha,$$

además

$$\cos \alpha = \frac{e^{\alpha i} + e^{-\alpha i}}{2}, \quad y \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{e^{\alpha i} - e^{-\alpha i}}{2i}.$$

Definición 1.2.10. *La fórmula de Euler permite introducir una nueva forma de representar un complejo*

$$z = |z|(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = |z| e^{\theta i}.$$

esta nueva forma $|z|e^{\theta i}$ *se conoce como forma exponencial*[3] *de un número complejo.*

Definición 1.2.11. *Sea* $z \in \mathbb{C}^*$*, llamaremos logaritmo neperiano de* z*,* $\ln z$*, al número complejo al que hay que elevar e para que de* z*. Veremos que, sorprendentemente, existen una cantidad numerable de complejos que son logaritmos de* z*.*

Proposición 1.2.9. *Sea* $z \in \mathbb{C}^*$*, entonces*

$$\ln z = \ln |z| + i \arg(z) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

el valor $Ln\, z = \ln |z| + i Arg(z)$ *se conoce como logaritmo principal.*

Definición 1.2.12. *(complejo elevado*[4] *a complejo)*
Sean $z, w \in \mathbb{C}$ *con* $z \neq 0$*,* $z^w = e^{w \cdot \ln z}$*.*

Definición 1.2.13. *(funciones hiperbólicas reales) Sea* $x \in \mathbb{R}$*, llamaremos funciones hiperbólicas reales a*

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad y \quad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

[3] La fórmula de Euler permite relacionar entre si los 5 números más "importantes" en matemáticas, $e^{\pi i} + 1 = 0$.

[4] Las primeras calculadoras de mesa daban error al calcular, por ejemplo $(-1)^3$, por aplicar indiscriminadamente la fórmula de esta definición.

Definición 1.2.14. *(funciones circulares e hiperbólicas complejas) Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces definimos*

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \ \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \\
\cosh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \ \operatorname{senh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \\
\tan z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \tanh z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.2.3. *Sea $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ un polinomio con coeficientes reales, es decir, $a_k \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces si $z = a + bi$ es raíz de $P_n(z)$, $\overline{z} = a - bi$ también es raíz de $P_n(z)$.*

1.3 Métrica. Puntos interiores, de acumulación y aislados

Definición 1.3.1. *(de distancia en un conjunto X)*

Sea X un conjunto, diremos que una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, es una distancia, si y solo si, se verifican:

i) *Si $x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0, \ \forall x, y \in X$.*

ii) *$d(x, x) = 0$, $\forall x \in X$ ($x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$).*

iii) *$d(x, y) = d(y, x), \ \forall x, y \in X$.*

iv) *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, $\forall x, y, z \in X$.*

Al par (X, d) se le llama espacio métrico. Si $Y \subset X$ al par $(Y, d|_{Y \times Y})$ se le llama subespacio métrico de X.

Proposición 1.3.1. *Sea (X, d) espacio métrico, se verifica:*

i) *$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in X$, entonces*

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \ldots + d(x_{n-1}, x_n).$$

ii) *$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.*

Definición 1.3.2. *Sea (X, d) un espacio métrico, llamaremos bola abierta de centro $a \in X$ y radio $r > 0$, al conjunto*

$$B(a, r) = \{x | x \in X \wedge d(x, a) < r\}.$$

Llamaremos bola cerrada de centro a y radio r, al conjunto

$$\overline{B}(a, r) = \{x | x \in X \wedge d(x, a) \leq r\}.$$

Llamaremos bola abierta perforada

$$B^*(a, r) = \{x | x \in X \wedge d(x, a) < r\} \setminus \{a\}.$$

Se llamara esfera de radio r y centro $a \in X$, al conjunto

$$S(a, r) = \{x | x \in X \wedge d(x, a) = r\}.$$

Definición 1.3.3. *Sea* (X, d) *espacio métrico y* $a \in X$*, diremos que un subconjunto* $V \subset X$*, es un entorno*[5] *de* a*, si y solo si, existe una bola* $B(a, r)$ *tal que*

$$a \in B(a, r) \subset V.$$

Definición 1.3.4. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y* $A \subset X$ *un subconjunto de* X*. Llamaremos diámetro de* A*, al número real, cuando exista tal que*

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) | x, y \in A\}.$$

Si $\delta(A) \in \mathbb{R}$*, se dice que* A *es un conjunto acotado. Si dicho extremo no existe, diremos que* A *no está acotado y escribiremos* $\delta(A) = +\infty$*.*

Definición 1.3.5. *Sea* (X, d) *espacio métrico, y* $A, B \subset X$ *subconjuntos no vacíos de* X*. Se define la distancia entre ambos conjuntos como*

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}.$$

En particular la distancia de un punto $x \in X$*, al conjunto* $A \subset X$*, vendrá dada por*

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) | y \in A\}.$$

Definición 1.3.6. *Sea* (X, d) *un espacio métrico y* $M \subset X$*.*

i) *Se dice que* $a \in X$ *es punto interior de* M*, si y solo si,* $\exists B(a, r)$*, tal que* $B(a, r) \subset M$*.*

ii) *Se dice que* $a \in X$ *es punto acumulación de* M*, si y solo si,* $\forall B^*(a, r)$*, se cumple* $B^*(a, r) \cap M \neq \emptyset$*.*

iii) *Se dice que* $a \in X$ *es punto adherente de* M*, si y solo si,* $\forall B(a, r)$*, se cumple* $B(a, r) \cap M \neq \emptyset$*.*

iv) *Se dice que* $a \in X$ *es un punto aislado de* M*, si y solo si,* $\exists B(a, r)$ *tal que* $B(a, r) \cap M = \{a\}$*.*

v) *Se dice que* $a \in X$ *es punto exterior de* M*, si y solo si,* a *es interior de* $X \setminus M$*.*

vi) *Se dice que* $a \in X$ *es punto frontera de* M*, si y solo si,* $\forall B(a, r)$*, se cumple* $M \cap B(a, r) \neq \emptyset \wedge (X \setminus M) \cap B(a, r) \neq \emptyset$*.*

Llamaremos interior de M

$$\mathit{Int}(M) = \overset{\circ}{M} = \{x | x \text{ es interior de } M\}.$$

Llamaremos conjunto derivado de M

$$M' = \{x | x \text{ es de acumulación de } M\}.$$

Llamaremos clausura o cierre de M

$$\overline{M} = \{x | x \text{ es adherente de } M\}.$$

[5] En realidad la definición de entorno es: "contiene un abierto que contiene al punto", pero es equivalente a la dada al ser las bolas base de la topología asociada a esa métrica, ver por ejemplo [?] pág.132

Llamaremos exterior de M

$$Ext(M) = \{x|x \text{ es punto exterior de } M\}.$$

Frontera de M

$$Fr(M) = \{x|x \text{ es punto frontera de } M\}.$$

Aislados de M

$$I(M) = \{x|x \text{ es punto aislado de } M\}.$$

Definición 1.3.7. *Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que $M \subset X$ es abierto, si y solo si, todos sus puntos son interiores.*

Definición 1.3.8. *Sea (X, d) un espacio métrico, se dice que $M \subset X$ es cerrado , si y solo si, su complementario es abierto*[6].

1.4 Límites de sucesiones

Definición 1.4.1. *Se llama sucesión de números reales a cualquier aplicación $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se denomina término general a la expresión analítica de la aplicación, es decir $a(n)$, suele escribirse*[7] *como a_n. Mientras que con $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$, o simplemente $\{a_1, a_2, \ldots\}$ representamos a toda la sucesión.*

Definición 1.4.2. *(de sucesión convergente)*

Una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, diremos que converge hacia a, o que tiene por límite el valor a, (en símbolos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), si y solo si,

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \ \textit{tal que} \ \ \forall n \geq n_0(\epsilon) \ \ \textit{se cumple que} \ \ |a_n - a| < \epsilon.$$

Definición 1.4.3. *Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$, diremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, si y solo si, $\forall K \in \mathbb{R}_+$, $\exists n_0(K) \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0(K)$, $a_n \geq K$. Análogamente, diremos que $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, si y solo si, $\forall K \in \mathbb{R}_+$ $\exists n_0(K) \in \mathbb{N}$, tal que $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq -K$. De una sucesión $\{a_n\}$ que tiende a $+\infty$ o $-\infty$ se dice que es divergente. Si una sucesión no es convergente ni divergente se dice que es oscilante.*

Proposición 1.4.1. *(unicidad del límite)*

Si $\{a_n\}$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ es único.

Definición 1.4.4. *(de sucesión acotada)*

Una sucesión $\{a_n\}$ de números reales, se dice que está acotada si el conjunto $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado (respecto de la topología usual de $\mathbb{R}$), es decir si $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tal que $|a_n| \leq M$.

Proposición 1.4.2. *(convergencia $\Rightarrow$ acotación)*

Toda sucesión convergente está acotada.

Definición 1.4.5. *(sucesiones monótonas)*

Una sucesión $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ se dice que es

[6] Una definición equivalente es: M es cerrado, si y solo si, contiene a todos sus puntos de acumulación (ver proposición **??**). La afirmación de que su complementario es abierto es entonces un teorema

[7] Dando mayor énfasis al resultado que a la variable, puesto que ya sabemos que recorre los naturales

i) monótona creciente estricta, si y solo si, $\forall m, n \in \mathbb{N}$*, tal que* $n < m \;\Rightarrow\; a_n < a_m$.

ii) monótona creciente (o no decreciente), si y solo si, $\forall m, n \in \mathbb{N}$*, tal que* $n < m \;\Rightarrow\; a_n \leq a_m$.

iii) monótona decreciente estricta, si y solo si, $\forall m, n \in \mathbb{N}$*, tal que* $n < m \;\Rightarrow\; a_n > a_m$.

iv) monótona no decreciente, si y solo si, $\forall m, n \in \mathbb{N}$*, tal que* $n < m \;\Rightarrow\; a_n \geq a_m$.

Teorema 1.4.1. *Toda sucesión monótona y acotada es convergente.*

Proposición 1.4.3. *(propiedades de las sucesiones convergentes)*
Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$*, se cumplen las siguientes afirmaciones:*

i) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \wedge \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

ii) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \wedge \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n).$$

iib) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ K \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(K \cdot a_n) = K \cdot (\lim_{n\to\infty} a_n).$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} a_n = a \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}.$$

iiib) $$\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \\ \wedge \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Proposición 1.4.4. *(generalización de +, ×,÷)*
Sean $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$*, entonces se cumplen:*

ia) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \\ \{b_n\}\ \textit{acotada} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty\ (-\infty).$$

ib) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty\ (-\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty\ (-\infty).$$

iia) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \\ \{b_n\}\ \textit{tal que}\ 0 < K \leq b_n \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = +\infty\ (-\infty).$$

iib) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \\ \{b_n\}\ \textit{tal que}\ b_n \leq K < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty\ (+\infty).$$

iiia) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \\ \lim_{n\to\infty} b_n = b > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty\ (-\infty).$$

iiib) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\ (-\infty) \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b < 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = -\infty\ (+\infty).$

iiic) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \wedge b_n > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty.$

iiid) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \\ |b_n| \geq K > 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0.$

Definición 1.4.6. *Han quedado, tras las proposiciones 1.4.3 y 1.4.4, cuatro casos en los que el límite resultante no depende solo del límite de los operandos sino de la forma en la que estos tienden a ese límite, y que se conocen como indeterminaciones*

$$\infty - \infty, \ \ 0 \cdot \infty, \ \ \frac{\infty}{\infty}, \ \ \frac{0}{0}.$$

Además si tenemos en cuenta la exponenciación pueden aparecer nuevas indeterminaciones

$$1^{\infty}, \ \ 0^0, \ \ \infty^0.$$

En total son 7 (sin tener en cuenta los signos) los casos que pueden presentarse.

Estas expresiones no hay que leerlas literalmente puesto que por ejemplo $1^{\infty} = 1$*, sino en el sentido de que se trata "algo que tiende a 1" elevado "algo que tiende a infinito" y lo mismo con todas las demás.*

Proposición 1.4.5. *Sean las sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\} \subset \mathbb{R}$*, verificándose* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$*,* $\lim_{n\to\infty} c_n = l$*. Si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0$ *se cumple* $a_n \leq b_n \leq c_n$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = l.$$

Proposición 1.4.6. *Sean las sucesiones* $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$*, tales que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\{b_n\}$ *es una sucesión acotada, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Definición 1.4.7. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales, consideremos una aplicación* $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *estrictamente creciente (*$n < m \ \Rightarrow \ \alpha(n) < \alpha(m)$*). Llamaremos subsucesión de* $\{a_n\}$ *respecto de* α*, a la sucesión* $\{a'_n\}$ *tal que* $a'_n = a_{\alpha(n)}$*.*

Proposición 1.4.7. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión convergente y tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$*, y sea* $\{a'_n\}$ *cualquier subsucesión de* $\{a_n\}$*, entonces* $\{a'_n\}$ *es convergente y* $\lim_{n\to\infty} a'_n = a$*. Si* $\{a_n\}$ *es divergente, entonces cualquier subsucesión suya también lo es.*

Proposición 1.4.8. *Cualquier sucesión* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *contiene una subsucesión que es o bien monótona creciente o bien monótona decreciente (no tienen porqué ser estrictas).*

Teorema 1.4.2. *(Bolzano-Weierstrass, versión subsucesiones)*

Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.

Definición 1.4.8. *Una sucesión* $\{a_n\}$ *es una sucesión de Cauchy, si y solo si,* $\forall \epsilon > 0$ $\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall m, n \geq n_0$ *se cumple que* $|a_m - a_n| < \epsilon$.

A veces se substituye la segunda parte por, si y solo si, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0$ *y* $\forall k \geq 1$ *se cumple que* $|a_{n+k} - a_n| < \epsilon$.

Teorema 1.4.3. *Sea una sucesión* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$

$$\{a_n\} \text{ converge} \iff \{a_n\} \text{ es de Cauchy.}$$

Proposición 1.4.9. *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *tal que*

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $\{a_n\}$ *es de Cauchy.*

Definición 1.4.9. *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$*, llamaremos punto de aglomeración de la sucesión, a cualquier límite subsecuencial. En otras palabras, un punto es de aglomeración de* $\{a_n\}$ *si existe una subsucesión de* $\{a_n\}$ *que lo tiene como límite.*

Definición 1.4.10. *Sea* $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ *y sea* $E = \{l : l \text{ es punto de aglomeración de } \{a_n\}\}$. *Llamaremos límite superior de* $\{a_n\}$*, en símbolos*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup\{E\},$$

del mismo modo llamaremos límite inferior de $\{a_n\}$*, en símbolos*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \inf\{E\}.$$

Tema 2

Funciones, Límites y Continuidad

2.1 Funciones de una variable

Definición 2.1.1. *Se llama función real de variable real a cualquier aplicación $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $M \subset \mathbb{R}$. Llamaremos dominio o campo de definición, al conjunto M en el que está definida la función, a veces se representa como $D(f)$. El conjunto de valores que toma la función, se denomina imagen, rango o recorrido y se nota como*

$$R(f) = f(M) = \{y \mid y = f(x) \wedge x \in M\}.$$

Se llama gráfica o grafo de la función, al subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}.$$

Si proyectamos $G(f)$ sobre el eje OX obtenemos el dominio de la función, mientras que si proyectamos sobre el eje OY obtenemos la imagen.

Definición 2.1.2. *(de restricción y extensión) Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, y sea $B \subset M$. La función $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$, $\forall x \in B$, recibe el nombre de restricción de f a B y se simboliza como*

$$g = f|_B.$$

Por el contrario dada g, se dice que f es una de las posibles extensiones de g a M.

Definición 2.1.3. *Se dice que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva o 1-1 en $I \subset M$ si $\forall x, y \in I$ se cumple $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ (o si se prefiere $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$). Se dice que f es inyectiva si lo es en $D(f)$.*

Definición 2.1.4. *Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación inyectiva, llamaremos función inversa de f a aquella función $g : f(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $(g \circ f) : M \longrightarrow M$, verificando*

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in M,$$

se nota como $g = f^{-1}$.

Definición 2.1.5. *(funciones monótonas)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, con $M \subset \mathbb{R}$, se dice que *i)* *f es monótona creciente estricta, si y solo si, $\forall x_1, x_2 \in M$, se cumple $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.*

ii) *f es monótona creciente, si y solo si, $\forall x_1, x_2 \in M$, se cumple $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*

iii) *f es monótona decreciente estricta, si y solo si, $\forall x_1, x_2 \in M$, se cumple $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.*

iv) *f es monótona decreciente, si y solo si, $\forall x_1, x_2 \in M$, se cumple $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Definición 2.1.6. *(funciones pares e impares)*
Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, con $M \subset \mathbb{R}$, se dice que f es par (o simétrica respecto al eje OY), si y solo si, $\forall x \in M$ se cumple $f(x) = f(-x)$.
Se dice que es impar (o simétrica respecto al origen), si y solo si, $\forall x \in M$ se cumple $f(x) = -f(-x)$.

Definición 2.1.7. *(función periódica)*
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, si existe un $T \in \mathbb{R}_+$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ se verifica que $f(x) = f(x+T)$. Se dice que f es una función periódica de periodo T.

Definición 2.1.8. *Llamaremos función racional en x a la que es cociente de dos polinomios en x.*

Definición 2.1.9. *Llamaremos función algebraica explícita , a aquella en la que la variable x es sometida a operaciones racionales, junto con un número finito de operaciones que supongan elevar las expresiones resultantes a exponentes fraccionarios.*

Definición 2.1.10. *Llamaremos funciones trascendentes a las que no son algebraicas.*

Definición 2.1.11. *Una subclase importante de las trascendentes son las que se conocen como funciones trigonométricas o circulares. Son* $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, *sus inversas y a las funciones generadas por ellas.*

2.2 Límites

Definición 2.2.1. *Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ y $a \in M'$, diremos que el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$ vale l (en símbolos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$), si y solo si, $\forall B(l, \epsilon)$, $\exists B^*(a, \delta)$ tal que $\forall x \in M \cap B^*(a, \delta)$ se cumple que $f(x) \in B(l, \epsilon)$.*
Esta definición establecida con bolas es válida para funciones entre espacios métricos cualesquiera, en $\mathbb{R}$ toma la siguiente forma

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \ \text{tal que} \ \forall x \in M \ \text{con} \ 0 < |x - a| < \delta$$
$$\text{se cumple que} \ |f(x) - l| < \epsilon.$$

Definición 2.2.2. *(de función acotada) Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, con $M \subset \mathbb{R}$, se dice que f está acotada en M, si $\exists K \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$|f(x)| \leq K, \ \ \forall x \in M.$$

Definición 2.2.3. *(generalizaciones con $l = \pm\infty$)*
Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ con $M \subset \mathbb{R}$, y $a \in M'$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \forall K \in \mathbb{R}_+ \ \exists\delta(K) > 0 \ \textit{ tal que } \forall x \in M \ \textit{ y con } \ 0 < |x-a| < \delta \\ \textit{se cumple que } \ f(x) \geq K.$$

De modo análogo tendremos que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R}_- \ \exists\delta(K) > 0 \ \textit{ tal que } \forall x \in M \ \textit{ y con } \ 0 < |x-a| < \delta \\ \textit{se cumple que } \ f(x) \leq K.$$

Definición 2.2.4. *(generalización cuando $a = \pm\infty$)*
Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, y tal que existe $b \in \mathbb{R}$ de modo que $[b, +\infty) \subset M$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0 \ \exists K(\epsilon) \in \mathbb{R}_+ \ \textit{ tal que } \forall x \geq K \\ \textit{se cumple que } \ |f(x) - l| < \epsilon.$$

Si $l = +\infty$ tendríamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \iff \forall K \in \mathbb{R}_+ \ \exists K'(K) \in \mathbb{R}_+ \ \textit{ tal que } \forall x \geq K' \\ \textit{se cumple que } \ f(x) \geq K.$$

Si $l = -\infty$ tendríamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K \in \mathbb{R}_- \ \exists K'(K) \in \mathbb{R}_+ \ \textit{ tal que } \forall x \geq K' \\ \textit{se cumple que } \ f(x) \leq K.$$

Análogamente si existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $(-\infty, b] \subset M$, podemos definir $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$. Tanto si $l \in \mathbb{R}$ como si $l = +\infty$ o si $l = -\infty$.

Definición 2.2.5. *Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, y $a \in (M \cap [a, +\infty))'$, diremos que f tiende a l, cuando $x \to a^+$ por la derecha*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0 \ \exists\delta(\epsilon) > 0 \ \textit{ tal que } \forall x \in M \ \textit{ y verificando } \ 0 < x - a < \delta \\ \textit{se cumple } \ |f(x) - l| < \epsilon.$$

Análogamente, sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, y $a \in ((-\infty, a] \cap M)'$, diremos que f tiende a l, cuando $x \to a^-$ por la izquierda

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = l \iff \forall\epsilon > 0 \ \exists\delta(\epsilon) > 0 \ \textit{ tal que } \forall x \in M \ \textit{ y verificando } \ 0 < a - x < \delta \\ \textit{se cumple } \ |f(x) - l| < \epsilon.$$

Proposición 2.2.1. *Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$ y $a \in ((-\infty, a] \cap M)' \cap (M \cap [a, +\infty))'$, se cumple*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \iff \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l.$$

Proposición 2.2.2. *(unicidad del límite funcional)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$. *Sea* $a \in M'$, *si existe* $\lim_{x \to a} f(x) = l$, *entonces el límite es único.*

Proposición 2.2.3. *(+,·,÷ de límites funcionales)*

Sean $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M'$, *y tales que* $\lim_{x \to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x \to a} g(x) = L$, *entonces se cumplen:*

i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.

ii) $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = (\lim_{x \to a} f(x)) \cdot (\lim_{x \to a} g(x))$.

iii) Si $\lim_{x \to a} g(x) = L \neq 0$, *entonces* $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$.

Proposición 2.2.4. *(caracterización del límite mediante sucesiones)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, *y* $a \in M'$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \forall \{a_n\} \subset M \setminus \{a\} \ \text{ y tal que } \lim_{n \to \infty} a_n = a \ \text{ se cumple que } \lim_{n \to \infty} f(a_n) = l.$$

2.3 Continuidad

Definición 2.3.1. *(continuidad local)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M$, *diremos que* f *es continua en* a, *si y solo si,* $\forall B(f(a), \epsilon)$ $\exists B(a, \delta)$ *tal que* $\forall x \in M \cap B(a, \delta)$ *se cumple que* $f(x) \in B(f(a), \epsilon)$. *Esta última cláusula también se puede escribir como* $f(M \cap B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon)$.

Con la métrica usual de $\mathbb{R}$, *queda:* $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta(\epsilon) > 0$ *tal que* $\forall x \in M$ *con* $|x - a| < \delta$ *se cumple que* $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Definición 2.3.2. *Diremos que* f *es continua en* $M \subset \mathbb{R}$, *si y solo si, es continua* $\forall x \in M$.

Proposición 2.3.1. *(Continuidad en los aislados)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, *se verifica*

$$a \in I(M) \implies f \ \text{ es continua en } \ a.$$

Proposición 2.3.2. *(caracterización operativa)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \subset \mathbb{R}$, $a \in M \cap M'$,

$$f \ \text{ es continua en } \ a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definición 2.3.3. *(de discontinuidad)*

Se dice que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *con* $a \in M$ *es discontinua en* $x = a$ *si* f *no es continua en* a.

Definición 2.3.4. *(de discontinuidad evitable)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, con* $M \subset \mathbb{R}$*, y sea* $a \in M'$*, (a punto de acumulación del dominio), se dice que* f *presenta en* $x = a$ *una discontinuidad evitable si existiendo* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *y siendo finito, es* f *discontinua en* a*, bien porque* f *no está definida en* a*, bien porque* $f(a) \neq l$*.*

Se llama evitable porque puede definirse una nueva función $f^* = \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq a \\ l & si \quad x = a, \end{cases}$ *que como vemos es "casi"* f*, y que sin embargo es continua en* a*.*

Definición 2.3.5. *(de discontinuidad de* $1^{\underline{a}}$ *especie o de salto)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, y* $a \in (M \cap [a, +\infty))' \cap (M \cap (-\infty, a])'$*. Se dice que* f *presenta una discontinuidad de primera especie o de salto en* $x = a$*, si y solo si, existen* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *y* $\lim_{x\to a^-} f(x)$*, y son finitos y distintos. Se llama salto al número* $|\lim_{x\to a^+} f(x) - \lim_{x\to a^-} f(x)|$*.*

Definición 2.3.6. *(de discontinuidad de* $2^{\underline{a}}$ *especie o esencial)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, donde* $a \in M'$*, se dice que* f *presenta en* $x = a$ *una discontinuidad esencial, si es una discontinuidad que no es ni evitable ni de salto.*

Proposición 2.3.3. *Sean* $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $M \subset \mathbb{R}$*,* f, g *continuas en* a*, entonces se cumplen:*

i) $(f + g)(x)$ *es continua en* a*.*

ii) $(f \cdot g)(x)$ *es continua en* a*.*

iii) Si $g(a) \neq 0$*, entonces* $(\frac{f}{g})(x)$ *es continua en* a*.*

Proposición 2.3.4. *Sea* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $M \subset \mathbb{R}$*,* $a \in M$*, y sea* $g : f(M) \longrightarrow \mathbb{R}$*, de modo que* f *es continua en* a *y* g *es continua en* $f(a)$*, entonces*

$$(g \circ f)(x) \;\; \text{es continua en} \;\; x = a.$$

Corolario 2.3.1. *Sea* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $M \subset \mathbb{R}$*,* $a \in M'$*,* $g : f(M) \longrightarrow \mathbb{R}$*, y tales que* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in f(M)$ *y* g *es continua en* l*, entonces*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\lim_{x\to a} f(x)).$$

2.5 Teoremas de Continuidad

Teorema 2.5.1. *Sea* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $M \subset \mathbb{R}$*,* $a \in M$ *,* f *continua en* a*,y* $f(a) > 0$*,* $(f(a) < 0)$*, entonces* $\exists r \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $\forall x \in B(a, r) \cap M$*,* $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$*.*

Corolario 2.5.1. *Sea* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $M \subset \mathbb{R}$*,* $a \in M$ *y* f *continua en* a*. Si* $\forall B(a, \delta)$ *existen* $x_1, x_2 \in B(a, \delta)$ *tales que* $f(x_1) \geq 0$ *y* $f(x_2) \leq 0$*, entonces* $f(a) = 0$*.*

Teorema 2.5.2. *(teorema de Bolzano)*

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua en* $[a, b]$ *y además* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

Definición 2.5.1. *(propiedad "D" de Darboux)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, se dice que* f *posee la propiedad "D" en* $I \subset M$ *(que por tanto es de carácter global), o que satisface en* I *la propiedad del valor intermedio, si toma todos*[1] *los valores entre dos puntos cualesquiera del conjunto imagen de* I*, es decir si* $f(I)$ *es un intervalo en sentido amplio*[2]*.*

Teorema 2.5.3. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *continua en* $[a, b]$*, entonces verifica la propiedad "D" en* $[a, b]$*.*

Teorema 2.5.4. *(teorema de acotación local)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, y* f *continua en* $a \in M$*, entonces existe* $B(a, r)$ *tal que* f *está acotada en* $B(a, r) \cap M$*.*

Teorema 2.5.5. *(teorema de acotación global)*

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua en* $[a, b]$*, entonces* f *está acotada en* $[a, b]$*.*

Definición 2.5.2. *Sea* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, se dice que* f *presenta en* $x = a$ *un máximo absoluto si y solo si,* $\forall x \in M$*,* $f(x) \leq f(a)$*.*

Análogamente se dice que tiene un mínimo en $x = a$*, si y solo si,* $\forall x \in M$*,* $f(x) \geq f(a)$*.*

Teorema 2.5.6. *(Teorema de Weierstrass)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *continua en* M*, y* $M = [a, b]$ *(intervalo cerrado y acotado), entonces* f *alcanza en* M *su máximo y su mínimo absoluto.*

Definición 2.5.3. *(de continuidad uniforme)*

Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$*, y sea* $A \subset M$*. Diremos que* f *es uniformemente continua en* A*, si y solo si,* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta(\epsilon) > 0$ *tal que* $\forall x', x'' \in A$*, verificando que* $|x' - x''| < \delta$ *se cumple* $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$*, (*$\delta$ *no depende de* x' *ni de* x''*).*

Teorema 2.5.7. *(teorema de Heine-Cantor)*

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *continua en* $[a, b]$*, entonces* f *es uniformemente continua en* $[a, b]$*.*

---

[1] En lenguaje topológico diríamos que $f(I)$ es conexo.

[2] Un conjunto $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, si $\forall x_1, x_2 \in I$ entonces todo x tal que $x_1 < x < x_2$, verifica $x \in I$. Según esto: $\{3\}$,$(3, 5]$,$(-\infty, 2)$, e incluso $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son intervalos.

Tema 3

Derivación

3.1 Derivada y derivadas sucesivas

Definición 3.1.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $A \subset \mathbb{R}$ es intervalo abierto*[1]*. Sea $a \in A$. Diremos que f es derivable en a, si y solo si, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ es finito, o si siendo infinito f es continua en $x = a$. Si llamamos $h = x - a$, el anterior límite puede escribirse también, en forma incremental, como $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Si una función es derivable en $x = a$, al valor de ese límite se le denomina derivada de f en a y se representa como $f'(a)$, o como $\dfrac{d}{dx} f(x)]_{x=a}$. Se dice que f es derivable en A, si f es derivable $\forall x \in A$.*

Diremos que $f(x)$ es derivable en $x = a$ por la derecha[2] *si*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$$

es un valor finito, o si resultando infinito f es continua en a por la derecha. Al valor correspondiente se le llama derivada de f en $x = a$ por la derecha.

Análogamente se dice que f es derivable en a por la izquierda si

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_-(a)$$

es una valor finito, o si resultando infinito f es continua en a por la izquierda. Al valor correspondiente se le llama derivada de f en $x = a$ por la izquierda.

Definición 3.1.2. *(función derivada y derivadas sucesivas)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable $\forall a \in B \subset A$. Puede construirse una aplicación $g : B \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $a \in B \rightsquigarrow f'(a) \in \overline{\mathbb{R}}$. A esta aplicación g se la denomina "función derivada primera" y se representa por $f'(x)$. A su vez $f'(x)$ puede ser derivable en $C \subset B$. Puede construirse

---

[1] Podría definirse, de un modo más general siempre que $a \in \overset{\circ}{D}(f)$, pero para no recargar los enunciados supondremos que A es abierto.

[2] En el caso de las derivadas laterales no es preciso que $a \in \overset{\circ}{D}(f)$. Para la derivada por la derecha, basta con que a sea tal que exista $[a, a + \epsilon) \subset D(f)$. Lo que a veces se denota diciendo que a es punto interior de $D(f)$ por la derecha. Análogamente por la izquierda.

una aplicación $h : C \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $a \in C \rightsquigarrow (f')'(a) = f''(a)$. A esta aplicación h se la conoce como "función derivada segunda" y se la representa como $f''(x)$. Este proceso se puede repetir siempre que las sucesivas funciones que van apareciendo tengan un dominio no vacío.

Definición 3.1.3. *(clase de una función)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, diremos que f es de clase 1 en A, y se representa como $f \in C^1(A)$, si f es derivable en A y además su derivada es una función continua en A.

En general f es de clase $k \in \mathbb{N}$ en A, $f \in C^k(A)$, si f es k veces derivable y la derivada k-ésima es continua.

Con esta notación f continua en A, se escribiría $f \in C^0(A)$.

Proposición 3.1.1. *(trivial)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, f continua en $a \in \mathring{A}$ y f derivable (con derivadas finitas) por la derecha y por la izquierda en a, entonces

i) *$f'_+(a)$ es la pendiente de la semitangente derecha a la gráfica de f en $(a, f(a))$.*

ii) *$f'_-(a)$ es la pendiente de la semitangente izquierda a la gráfica de f en $(a, f(a))$.*

Definición 3.1.4. *(la diferencial)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A$ y f derivable en $x = a$. Se llama diferencial de f en $x = a$, a la aplicación lineal $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda(h) = f'(a)h$ (a veces se escribe $dy = f'(a)dx$ y cuando trabajamos en punto genérico $dy = f'(x)dx$).

3.2 Cálculo de derivadas

Teorema 3.2.1. *(derivabilidad $\Rightarrow$ continuidad)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \subset \mathbb{R}$, y f derivable en a, entonces f es continua en a.

Teorema 3.2.2. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, f,g derivables en a, con derivada finita, entonces*

i) $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

ii) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

iii) *Si $g(a) \neq 0$, entonces* $(\frac{f}{g})'(a) = \dfrac{g(a)f'(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.

Teorema 3.2.3. *(regla de la cadena) Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$, f derivable en a y g derivable en $f(a)$ con derivadas finitas, entonces*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Proposición 3.2.1. *(previa al teorema de la derivada de la función inversa)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, entonces se verifica:

i) *Si f es inyectiva en A, entonces existe $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

ii) *Si f es inyectiva y continua en A, entonces f^{-1} además de existir es continua en $f(A)$.*

Teorema 3.2.4. *(derivada de la función inversa)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ *intervalo abierto,* $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = b$, *se cumple*

$$\left.\begin{array}{l} i)\ f \text{ es continua en } A \\ ii)\ f \text{ es inyectiva en } A \\ iii)\ f \text{ es derivable en } a \in A \\ iv)\ f'(a) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} f^{-1} \text{ es derivable en } b \\ \text{y además } (f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \end{array}$$

Definición 3.2.1. *Sean* $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in A \subset \mathbb{R}$, f, g *derivables* m *veces en* a. *Diremos que* f *y* g *tienen un contacto en* $x = a$ *de orden* m, *si y solo si,* $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a)$, *para* $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. *Obsérvese que una nueva función definida por* $h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \leq a \\ g(x) & si \quad x > a, \end{cases}$ *sería continua en* $x = a$ *si* $m = 0$, *derivable si* $m = 1$, *de curvatura continua si* $m = 2$, *etc,..*

Definición 3.2.2. *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y sea* $a \in A$, *se dice que* f *presenta en* $x = a$ *un máximo relativo si* $\exists B(a, \delta)$ *tal que* $\forall x \in B(a, \delta) \cap A$, *se verifica*[3] $f(x) \leq f(a)$.

Análogamente diremos que f *presenta en* $a \in A$ *un mínimo relativo si* $\exists B(a, \delta)$ *tal que* $\forall x \in B(a, \delta) \cap A$, *se verifica* $f(x) \geq f(a)$.

Cuando sea necesario referirse a máximos o mínimos relativos indistintamente, los denominaremos extremos relativos.

Definición 3.2.3. *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y* $a \in A$, *diremos que* f *es localmente creciente (estricta) en* $a \in A$ *si* $\exists B(a, \delta)$ *tal que:*

$$\begin{array}{lcl} \forall x \in B(a, \delta) \cap A \wedge x < a & \Rightarrow & f(x) < f(a), \\ \forall x \in B(a, \delta) \cap A \wedge x > a & \Rightarrow & f(a) < f(x). \end{array}$$

Diremos que f *es localmente decreciente (estricta) en* $a \in A$ *si* $\exists B(a, \delta)$ *tal que:*

$$\begin{array}{lcl} \forall x \in B(a, \delta) \cap A \wedge x < a & \Rightarrow & f(x) > f(a), \\ \forall x \in B(a, \delta) \cap A \wedge x > a & \Rightarrow & f(x) < f(a). \end{array}$$

Proposición 3.2.2. *Sea* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, A *intervalo y* f *derivable en* $a \in A$, *se cumple*

$$\begin{array}{lcl} f'(a) > 0 \text{ o } +\infty & \Rightarrow & f \text{ es localmente creciente en } a \\ f'(a) < 0 \text{ o } -\infty & \Rightarrow & f \text{ es localmente decreciente en } a. \end{array}$$

Corolario 3.2.1. *(condición necesaria de extremo relativo)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{A}$, *y* f *derivable en* a, *entonces:*

$$f \text{ tiene un extremo relativo en } a \Longrightarrow f'(a) = 0.$$

Teorema 3.2.5. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, *tal que* f *sea derivable en* $c \in (a, b)$, *y* f *presenta en* c *un extremo relativo, entonces* $f'(c) = 0$.

[3] Obsérvese la importancia que tiene $\cap A$, si prescindimos de esa intersección, ver por ejemplo [?] pág. 323, el comportamiento en la frontera cambia.

3.3 Teoremas de derivación

Teorema 3.3.1. *(Teorema de Rolle)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b) *y además se cumple que* $f(a) = f(b)$*, entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$*.*

Teorema 3.3.2. *(Teorema del valor medio de Cauchy)*
Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, continuas en* $[a, b]$*, derivables en* (a, b)*, entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Teorema 3.3.3. *(Teorema del valor medio de Lagrange)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *continua en* $[a, b]$*,* f *derivable en* (a, b)*, entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)\ (b - a).$$

Corolario 3.3.1. *Sea* $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *derivable en* (a, b)*, se cumplen:*

i) $f'(x) > 0,\ \forall x \in (a, b) \implies f$ *es monótona creciente en* (a, b)*.*

ii) $f'(x) < 0,\ \forall x \in (a, b) \implies f$ *es monótona decreciente en* (a, b)*.*

iii) $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a, b) \implies f$ *es constante en* (a, b)*.*

Teorema 3.3.4. *(de aplicación en funciones definidas a tramos)*
Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *continua en* $c \in (a, b)$*, se verifican:*

i) Si $f(x)$ *es derivable* $\forall x \in (c, b)$ *y además existe* $\lim_{x \to c^+} f'(x)$*, entonces existe* $f'_+(c)$ *y se cumple que*

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c^+} f'(x).$$

ii) Si $f(x)$ *es derivable* $\forall x \in (a, c)$ *y además existe* $\lim_{x \to c^-} f'(x)$*, entonces existe* $f'_-(c)$ *y se cumple que*

$$f'_-(c) = \lim_{x \to c^-} f'(x).$$

Teorema 3.3.5. *Sea* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$*,* f *derivable en* $[a, b]$ *y tal que* $f'(a) < \lambda < f'(b)$*. Entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = \lambda$*. (Un resultado similar se cumple si* $f'(a) > \lambda > f'(b)$*).*

Teorema 3.3.6. *(regla de L'Hôpital,* $x \to a,\ \frac{0}{0}$*)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $A \subset \mathbb{R}$*, intervalo abierto,* $a \in A$*, y verificándose:*

i) $\exists B(a, \delta)$ *tal que* f *y* g *son derivables en* $B^*(a, \delta)$ *y además* $g'(x) \neq 0,\ \forall x \in B^*(a, \delta)$*.*

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \to a} g(x) = 0$*.*

iii) Existe $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$*.*

Entonces se cumple:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Corolario 3.3.2. *(L'Hôpital $x \to +\infty$, $\frac{0}{0}$)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A = (c, +\infty)$, y se cumplen:

i) $\exists K \in \mathbb{R}_+$, *tal que* $\forall x > k > c$, *f y g son derivables y además* $g'(x) \neq 0$.

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \overline{\mathbb{R}}$.

iii) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Corolario 3.3.3. *(L'Hôpital, $x \to a$, $\frac{\infty}{\infty}$)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, $a \in A$ y se cumplen:

i) *Existe $B(a, \delta)$ tal que $\forall x \in B^*(a, \delta)$ f y g son derivables y además $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in B^*(a, \delta)$.*

ii) *Existe* $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$.

iii) *Se verifica que* $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \wedge \lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Tema 4

Aplicaciones del Cálculo Diferencial

4.1 Aproximación. Teorema de Taylor

Proposición 4.1.1. *(Taylor para un polinomio)*
Sea un polinomio $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ y $a \in \mathbb{R}$ un número real dado, entonces podemos escribir

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \ldots + b_n(x-a)^n, \quad donde \ \ b_k = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}.$$

Definición 4.1.1. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, intervalo abierto y f una función n veces derivable en $a \in A$. Llamaremos polinomio n-ésimo de Taylor asociado a la función f en a, (cuando $a = 0$ se denomina polinomio de Maclaurin)*[1] *al polinomio:*

$$P_{n,a}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Otras veces se expresa más correctamente como $P_{n,a,f}(x)$, y otras, cuando queda claro en el contexto quien es f y quien es a, como $P_n(x)$.

Definición 4.1.2. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, A intervalo abierto y f n veces derivable en A. Llamaremos resto n–ésimo de Taylor de f en a a la función*

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x).$$

Teorema 4.1.1. *(Fórmula de Taylor: obtención del resto de Lagrange)*
Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, y f derivable $n+1$ veces en A, sean $a \in A$ y $b \in A$, entonces

$$R_{n,a}(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}, \quad con \ \ c \in (a,b) \ \ o \ \ c \in (b,a).$$

[1] Si bien es injusto asociar el nombre de Colin Maclaurin a su serie, en el *Methodus differentialis* de Stirling ya habia aparecido una docena de años antes, se compensa en alguna forma con “la regla de Cramer” debida a Maclaurin.

Teorema 4.1.2. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ $A \subset \mathbb{R}$ abierto, f derivable $n+1$ veces en A, y sea $a \in A$, entonces se verifica*

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

siendo c un punto del intervalo que une x con a.

4.2 Optimización

Teorema 4.2.1. *(Condiciones suficientes para la existencia de extremos relativos)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto y $f \in C^n(A)$ (n veces derivable y con derivada n–ésima continua) y sea $a \in A$, tal que

$$f'(a) = f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \neq f^{(n)}(a),$$

se cumplen:

i) Si n es par y $\begin{cases} f^{(n)}(a) > 0, & \text{entonces en } x = a \text{ hay mínimo relativo,} \\ f^{(n)}(a) < 0, & \text{entonces en } x = a \text{ hay máximo relativo.} \end{cases}$

ii) Si n es impar, no hay máximo ni mínimo relativo (hay un punto de inflexión con tangente horizontal).

4.2 Análisis de gráficas

Definición 4.2.1. *(convexidad local)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, f continua en A y derivable en $a \in A$ (con derivada finita). Se dice que f es convexa localmente en a si $\exists B(a, \delta)$ en la cual la gráfica de f está por debajo de la tangente a f en $x = a$.

Definición 4.2.2. *(concavidad local)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, f continua en A y derivable en $a \in A$ (con derivada finita). Se dice que f es cóncava localmente en a si $\exists B(a, \delta)$ en la cual la gráfica de f está por encima de la tangente a f en $x = a$.

Definición 4.2.3. *Se dice que f es convexa o cóncava en un subintervalo $B \subset A$ si es convexa o cóncava $\forall x \in B$.*

Definición 4.2.4. *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, f continua en A y derivable en $a \in A$ (con derivada finita o infinita). Se dice que f tiene un punto de inflexión en $x = a$ si la tangente corta a la gráfica de f en a.*

Teorema 4.2.1. *(condiciones suficientes concavidad, convexidad e inflexión)*

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto, $f \in C^n(A)$, y $a \in A$ tal que

$$f''(a) = f'''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0 \neq f^{(n)}(a),$$

se cumplen:

i) Si n es par y $\begin{cases} f^{(n)}(a) > 0 \text{ en } x = a, & \text{entonces es cóncava localmente en } a, \\ f^{(n)}(a) < 0 \text{ en } x = a, & \text{entonces es convexa localmente en } a. \end{cases}$

ii) Si n es impar, entonces hay inflexión en $x = a$.

Tema 5

Curvas en paramétricas y en polares

5.1 Curvas en forma paramétrica

Definición 5.1.1. *Llamaremos arco de Jordan en el plano, a cualquier aplicación biunivoca y continua* $\overline{f} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*, que venga dada mediante las funciones componentes* $x = f_1(t)$*,* $y = f_2(t)$*, es decir* $f(t) = [x(t), y(t)]$*. Este arco de Jordan se dice analítico si las funciones* $f_1(t)$ *y* $f_2(t)$ *son analíticas y además* $|f_1'(t)| + |f_2'(t)| \neq 0$*,* $\forall t \in [a,b]$*, (esto es sin puntos singulares*[1]*).*

Proposición 5.1.1. *La ecuación de la recta tangente a un arco de Jordan diferenciable en un punto regular* $\overline{f}(t_0) = [x(t_0), y(t_0)]$ *viene dada por* $\overline{h}(t) = [x(t_0) + (t - t_0)x'(t_0), y(t_0) + (t - t_0)y'(t_0)]$*, con* $t \in \mathbb{R}$*.*

5.2 Coordenadas polares en el plano

Definición 5.2.1. *Consideremos un punto* O *llamado polo y una semirrecta* OX *llamada eje polar. La posición de un punto cualquiera* P *del plano queda determinada si se traza el segmento* OP *y se su longitud que llamaremos* ρ*, y se mide también el ángulo que en sentido positivo forma el segmento* OP *con el eje polar, que llamaremos argumento y lo representaremos como* θ*. Obviamente* $\rho \in [0, +\infty)$ *y* $\theta \in [0, 2\pi)$*.*

A este par de números se les denomina coordenadas polares de P *y se escribe* $P(\rho, \theta)$*. Obviamente los puntos del eje polar tienen nulo el valor del argumento.*

Proposición 5.2.1. *La distancia entre dos puntos* $P(\rho_1, \theta_1)$ *y* $Q(\rho_2, \theta_2)$ *vale*

$$d = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\theta_2 - \theta_1).$$

Proposición 5.2.2. *(ecuación de una recta)*

La ecuación de una recta, viene dada por

$$\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta,$$

[1]Se llaman puntos singulares de una curva aquellos puntos para los que $|f_1'(t)| + |f_2'(t)| = 0$. En otro caso se dice que los puntos son regulares.

donde

$$A = \frac{\cos\alpha}{p}, \quad B = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{p},$$

con p distancia de la recta al polo y α ángulo con el eje polar del segmento que une el polo con la recta.

Proposición 5.2.3. *(ecuación de la recta que pasa por dos puntos)*

Dados dos puntos $P(\rho_1, \theta_1)$ y $Q(\rho_2, \theta_2)$, entonces la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos viene dada por

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ \frac{1}{\rho_2} & \cos\theta_2 & \operatorname{sen}\theta_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.1}$$

Proposición 5.2.4. *(distancia recta-punto)*

Sea un punto $P(\rho_1, \theta_1)$, y la recta $\frac{1}{\rho} = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta$, entonces la distancia del punto a la recta vendrá dada por

$$d = \frac{A\rho_1\cos\theta_1 + B\rho_1\operatorname{sen}\theta_1 - 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Proposición 5.2.5. *(ángulo de dos rectas) Sean dos rectas*

$$\frac{1}{\rho} = A_1\cos\theta + B_1\operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{1}{\rho} = A_2\cos\theta + B_2\operatorname{sen}\theta,$$

si llamamos γ al ángulo que forman, entonces

$$\tan\gamma = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Corolario 5.2.1. *La condición de paralelismo será por tanto*

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \quad i.e. \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Asimismo la condición de perpendicularidad será

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Definición 5.2.2. *En lo que sigue consideraremos la ecuación de una curva en polares, para ello adoptaremos por su utilidad la representación*

$$\frac{1}{\rho} = f(\theta).$$

Proposición 5.2.6. *Sea $f(\theta)$ de clase como poco dos en su dominio de definición, entonces la ecuación de la tangente a la curva $1/\rho = f(\theta)$ en el punto $P(\rho_1, \theta_1)$, distinto del polo, será*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\rho} & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{\rho_1} & \cos\theta_1 & \operatorname{sen}\theta_1 \\ (\frac{1}{\rho})'_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}\cos(\theta - \theta_1) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_1 \operatorname{sen}(\theta - \theta_1). \tag{5.2}$$

Definición 5.2.3. *Dada una curva $1/\rho = f(\theta)$, sea O el polo y sea un punto P sobre la curva. Se trazan la tangente a la curva en P y la perpendicular al radio vector del punto P que pasa por el polo. Llamemos A al punto intersección de estas dos rectas, y B al punto de intersección de la normal con la citada perpendicular al radio vector. Se considera el triángulo rectángulo PAB, se llama normal al segmento $N = \overline{PB}$, tangente $T = \overline{PA}$, así como subnormal $S_N = \overline{BO}$, y subtangente $S_T = \overline{OA}$ respectivamente a cada uno de los dos segmentos en que queda divida la hipotenusa $\overline{AB}$ de dicho triángulo por el punto O.*

Proposición 5.2.7. *(normal, tangente, subnormal y subtangente) Si llamamos μ al ángulo de la tangente con el radio vector, T y N a la longitud de los segmentos tangente y normal, y S_T y S_N a la longitud de la subtangente y la subnormal, entonces se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\tan\mu = \frac{\rho}{\rho'}, \quad N^2 = \rho^2 + [\rho']^2, \quad T^2 = \rho^2, \quad S_T = \frac{\rho^2}{\rho'}, \quad S_N = \rho'.$$

Definición 5.2.4. *Se dice que una curva es cóncava o convexa respecto del polo O, en uno de sus puntos P, según que en un entorno de P la curva quede en el mismo semiplano que O, o en el opuesto respecto de la tangente en P.*

Proposición 5.2.8. *Sea una curva de ecuación $1/\rho = f(\theta)$, de clase al menos dos en un entorno del punto, entonces se cumplen*

i) *Si* $\dfrac{2[\rho']^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{\rho^3} > 0$, *entonces hay concavidad.*

ii) *Si* $\dfrac{2[\rho']^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{\rho^3} < 0$, *entonces hay convexidad.*

iii) *Si* $\dfrac{2[\rho']^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{\rho^3} = 0$, *entonces puede haber inflexión.*

Definición 5.2.5. *Puede suceder que cuando se haga crecer θ indefinidamente, $\rho \to a < +\infty$. Si se dibuja la circunferencia de radio a, al crecer θ la curva va envolviendo o es envuelta por dicha circunferencia. Se dice entonces que la curva posee una circunferencia asintótica. Si $a = 0$ la circunferencia se reduciría a un punto y se diría que la curva tiene un punto asintótico en el polo.*