

# Cálculo Infinitesimal

Primer Examen Parcial  
3 de febrero de 2000

Tiempo 2:30h.  
2 + 2 + 2 + 2 + 2

APELLIDOS:

GRUPO:

NOMBRE:

1. Responder la pregunta de teoría o el problema (solo una de las dos opciones)

**Teoría.** Teorema de *Weierstrass*.

**Problema.** Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene un lado sobre el eje  $X$  y está inscrito en el triángulo determinado por las rectas  $y = 0$ ,  $y = x$ ,  $y = 4 - 2x$ .

2. a) Dibujar la region del plano complejo definida por la expresión  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |\bar{z} - 3i| \leq \frac{5}{2}\}$ . Calcular y representar las raíces cúbicas de  $i$ . ¿Cuáles de estas raíces están en la región  $A$ ?
- b) Demostrar por inducción

$$1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = 2^n(n-1) + 1.$$

3. Calcular los siguientes límites.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt[3]{1+n^2}} + \frac{n+1}{\sqrt[3]{2+n^2}} + \dots + \frac{n+1}{\sqrt[3]{n+n^2}}$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n}{5^n}$ .

4. Sea la función  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por la expresión

$$g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-3}} \log(x^3 - 4x^2 + 4x)}{x-1}.$$

Se pide:

- a) El dominio  $A$  de  $g$ .
- b) Calcular el límite en los puntos frontera del dominio  $A$  y clasificar las discontinuidades de la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

5. a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 5 en el punto  $a = 1$ ,  $P_{5,1}(x)$ , de la función  $f(x) = x \log x$ . Acotar el error cometido al utilizar dicho polinomio para calcular  $f(1.5)$ .
- b) Dibujar en los mismos ejes  $f(x) = x \log x$  y el polinomio  $P_{2,1}(x)$ .