CALCULO 11-M
Hoja de Problemas
Gradientes, Máximos y Mínimos

28/04/99

1 Derivadas direccionales y gradientes

1. Sea
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$
si $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$.

   (a) Comprobar analíticamente que f no es continua, y por tanto tampoco diferenciable, en el punto $(0,0)$.

   (b) Demostrar que a pesar de ello f admite derivadas direccionales en dicho punto según todas las direcciones $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ y que $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = 0$ para todo θ.

2. Sea
$$f(x,y) = x^{2/3} + xy + y^{2/3}.$$

   (a) Calcular la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f$ de f en el punto $P = (-1,1)$ en la dirección $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$.

   (b) ¿En qué dirección f crece mas rápidamente? ¿A qué ritmo?

3. La temperatura en un punto (x,y,z) de un sólido viene dada por la fórmula
$$T(x,y,z) = \sin xy + e^{x^2+y^2+z^2} - \ln xz.$$

(a) Calcular el ritmo de cambio de la temperatura en el punto $P = (1, 0, 2)$ y en la dirección $\mathbf{u} = (1, -1, \sqrt{2})$.

(b) ¿En qué dirección T crece mas rápidamente? ¿A qué ritmo?

4. ¿En qué direcciones es la derivada de

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

en el punto $(1, 1)$ igual a cero?

5. En los siguientes casos determinar el plano tangente y la recta normal a la superficie $f(x, y, z) = 0$ en el punto P.

(a) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 5z^2 - 11$ y $P = (1, 2, 1)$.

(b) $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 6$ y $P = (1, 1, \sqrt{2})$.

(c) $f(x, y, z) = 2z - x^2$ y $P = (2, 0, 2)$.

6. Hallar la derivada de la función

$$w = x + y + z$$

en la dirección de la normal exterior a la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

en uno de sus puntos. ¿En qué puntos de la esfera la derivada normal de la función w es máxima?, ¿mínima?, ¿cero?

7. Determinar la recta tangente a la curva intersección de las superficies

$$\begin{aligned} xyz &= 1 \\ x^2 + 2y^2 + +3z^2 &= 6 \end{aligned}$$

en el punto $(1, 1, 1)$.

8. Probar que la curva

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j} - \frac{1}{4}(t + 3)\mathbf{k}$$

es normal a la superficie

$$z = x^2 + y^2 - 3$$

cuando $t = 1$.

9. Determinar el plano tangente a la superficie

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \qquad (a > 0)$$

en un punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la misma. Demostrar que dicho plano corta a los ejes coordenados según segmentos cuya suma de longitudes es constante.

2 Máximos y Mínimos

1. Estudiar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

en la región

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}.$$

2. Estudiar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = e^{xy} \sin y$$

en la región

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}.$$

3. Estudiar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$$

en la región

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

4. Estudiar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

en la región

$$R = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 / y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2x\}.$$

5. Estudiar los máximos y mínimos de la función

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)\ln(x+y)$$

en la región

$$R = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

6. Estudiar los extremos de la siguiente función en todo $\mathcal{R}^2$:

   (a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

7. Estudiar los extremos de la siguiente función en todo $\mathcal{R}^2$:

   (a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$

8. Estudiar los extremos de las siguientes funciones en todo $\mathcal{R}^2$:

   (a) $f(x,y) = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
   (b) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3yx^2$
   (c) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$

9. Estudiar los extremos de las siguientes funciones en todo $\mathcal{R}^3$:

   (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2zx - xy$
   (b) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xy$
   (d) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - x^2y$
   (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^4 - 3xy + 2x$

3 Multiplicadores de Lagrange

1. Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una elipse de semiejes a y b con lados paralelos a los ejes coordenados. Determinar la razón entre el área de este rectángulo y el área de la elipse.

2. Se desea construir una caja rectangular de volumen fijo V utilizando tres materiales diferentes para cada par de caras opuestas. El precio de los materiales es de 2, 3 y 5 pesetas el centímetro cuadrado respectivamente. Determinar las dimensiones de la caja de menor coste.

3. Se desea construir una caja rectangular de tal forma que la suma de su longitud más el perímetro a lo ancho sea de 250 centímetros. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen.

4. Determinar la mínima distancia del origen al plano $ax+by+cz+d=0$.

5. Un alambre de un metro de longitud se corta en tres trozos. El primero se dobla en forma de un círculo. El segundo en forma de triángulo y el tercero en forma de un cuadrado. ¿Cuál debe ser la longitud de cada trozo para que el área total de las tres figuras sea mínima? ¿y para que sea máxima?

6. Sea $P = abc$ el producto de 3 números reales positivos o cero cuya suma es uno. Demostrar que $P \leq 1/27$ (*Sugerencia* maximizar la función $\ln P$). Concluir que
$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt[3]{abc}.$$

7. Encontrar el volumen mínimo de una región limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$ y un plano tangente al elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$
en un punto del primer octante.

8. Encontrar las distancias máxima y mínima del origen a la elipse intersección del elipsoide
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$$
y el plano
$$x+y-z=0.$$

9. Encontrar la mínima distancia del origen a la superficie
$$x^2-y^2+z^2=4.$$

10. Encontrar la máxima distancia del origen a la superficie

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$