CALCULO 11-M
Hoja de Problemas
Derivadas Parciales

24/03/99

1 Dominios, Curvas y Superficies de Nivel

1. Indicar el tipo de superficie y representarla esquemáticamente

   (a) $9x^2 + y^2 + 36z^2 = 9$
   (b) $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$
   (c) $y^2 + z^2 - x^2 = 1$
   (d) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
   (e) $y^2 - x^2 = z$
   (f) $y^2 + z^2 = x^2$
   (g) $x^2 + 4z^2 = 16$
   (h) $yz = 1$
   (i) $z = -(x^2 + y^2)$
   (j) $x^2 - z^2 - y^2 = 1$
   (k) $3z^2 - x^2 - 3y^2 = 9$
   (l) $16y^2 + 9z^2 - 4x^2 = 0$

2. Determinar una ecuación de la superficie obtenida al girar la curva alrededor del eje OX

(a) la recta $z = 2y$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

(b) la parábola $z = 1 + y^2$

(c) media elipse $z^2 + 2y^2 = 1$

(d) el círculo $y^2 + (z-3)^2 = 1$ (Dividirlo en dos partes y obtener dos ecuaciones, resulta un toro)

3. Determinar el dominio de las siguientes funciones

   (a) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 - y^2}}$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{y^2 - 1}}$

   (d) $f(x,y,z) = \ln(xyz)$

   (e) $f(x,y,z) = \arcsin(\dfrac{1}{x+y+z})$

4. Obtener las curvas de nivel de las siguientes funciones

   (a) $f(x,y) = x + y$

   (b) $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

   (c) $f(x,y) = x^2 - y^2$

   (d) $f(x,y) = |x| + |y|$

   (e) $f(x,y) = \ln(xy)$

5. Obtener las superficies de nivel de las siguientes funciones

   (a) $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

   (b) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$

   (c) $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

   (d) $f(x,y,z) = 2x^2 + z^2$

   (e) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

2 Límites y Continuidad

1. Obtener los límites siguientes:

   (a)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy-3y^2+5}{1+x^2+y^2}$$

   (b)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\cos y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$$

   (c)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{xy}$$

   (d)
   $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$$

   (e)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\arcsin(x/y)}{1+xy}$$

2. Obtener los límites siguientes:

   (a)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$$

   (b)
   $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$$

   (c)
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy}$$

(d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$$

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x^y$$

3. Usar coordenadas polares para obtener los siguientes límites:

   (a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

   (b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

   (c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

   (d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$$

   (e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

4. Mediante límites direccionales demostrar que no existen los siguientes límites:

   (a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(c)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|xy|}$$

(d)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(e)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$$

5. Mediante límites por caminos demostrar que no existen los siguientes límites:

   (a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

   (b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{x}(x^4+y^2)$$

6. Calcular el límite mediante desarrollo de taylor:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x^2-\sin y^2}{x^2-y^2}$$

7. Obtener los límites siguientes:

   (a)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{1+x^2+y^2+z^2}$$

(b)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\cos xyz}$$

(c)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin x \sin y \sin z}{xyz}$$

(d)

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,2,3)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

(e)

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (\sin^2 x + \cos^2 y + \sec^2 z)$$

3 Derivadas Parciales y Diferenciabilidad

1. Sea
$$f(x,y) = e^{xy^2}.$$
Comprobar las igualdades
$$f_{xy} = f_{yx}$$
y
$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx}.$$

2. Sea
$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$
para $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0)=0$.

   (a) Mostrar que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
   (b) Calcular f_x y f_y en un punto $(x,y) \neq (0,0)$.
   (c) Mostrar que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

3. *Ecuación de Laplace* La ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

se conoce como ecuación de Laplace. Probar que las siguientes funciones son solución de dicha ecuación:

(a) $f(x,y,z) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 2(z-c)^2$

(b) $f(x,y,z) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$

(c) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

4. Determinar valores de a, b y c tales que

$$f(x,y,z) = \sin ax \sin by \cosh cz$$

sea solución de la ecuación de Laplace.

5. *Ecuación de Ondas* La ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

se conoce como ecuación de ondas. Probar que las siguientes funciones son solución de dicha ecuación:

(a) $f(x,t) = a\sin(x - ct) + b\sin(x + ct)$

(b) $f(x,t) = \sin wct \sin wx$

(c) $f(x,t) = \ln(ax + act)(bx - bct)$

6. Calcular la linealización $L(x,y)$ de $f(x,y)$ en el punto P que se indica

(a) $f(x,y) = 100 - 20x^2 - 30y^2; \quad P = (1,1)$

(b) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2; \quad P = (1,2)$.

(c) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ y $P = (1/2, 1/3)$.

(d) $f(x,y) = (x^3 + y/2)^{2/3}; \quad P = (1,1)$.

(e) $f(x,y) = x^2y; \quad P = (1,-1)$.

7. Obtener la linealización de $f(x,y,z)$ en los puntos indicados:

   (a) $f(x,y,z) = xy + xz + yz; \quad P = (1,1,1)$.
   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \quad P = (0,1,0)$.
   (c) $f(x,y,z) = e^{-x}\sin(y+z); \quad P = (0,0,\pi)$.
   (d) $f(x,y,z) = \arctan xyz; \quad P = (1,0,2)$.

8. Sea
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0) = 0.$$

   (a) Calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   (b) Probar que f no es continua ni diferenciable en $(0,0)$.

9. Sea
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0) = 0.$$

   (a) Calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   (b) Probar que f es continua pero no diferenciable en $(0,0)$.

   Sea
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt[4]{x^2+y^2}} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0); \qquad f(0,0) = 0.$$

   (a) Calcular $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$.
   (b) Probar que f es continua y diferenciable en $(0,0)$.

10. Una función con derivadas parciales continuas es diferenciable pero una función puede ser diferenciable y sus derivadas parciales no ser continuas. Sea
$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
si $(x,y) \neq (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

   (a) Demostrar que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
   (b) Comprobar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

(c) Calcular la derivada parcial f_x en cualquier otro punto $(x, y) \neq 0$ y comprobar que dicha derivada no es continua en $(0, 0)$.

11. Se desea construir un depósito de forma cilíndrica de radio $r = 2$ m y altura $h = 3$ m .

    (a) Estimar el incremento de volumen ΔV mediante dV si r se incrementa en 0.03m y h en -0.01m. ¿Cual es incremento estimado de volumen en tanto por ciento?

    (b) Si r se mide con un error no mayor que el 2% y h con un error no mayor que el 0.5%, estimar el error en tanto por ciento que se comete en el cálculo del volumen.

    (c) Determinar un cuadrado alrededor del punto $(r = 2, h = 3)$ para que el volumen varíe en menos de $\pm 0.1 m^3$.

12. Tres resistores con $R_1 = 100$, $R_2 = 200$ y $R_3 = 245$ ohmios se colocan en un circuito conectados en paralelo. La resistencia equivalente del conjunto viene expresada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

    (a) Demostrar que

$$dR = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 dR_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 dR_2 + \left(\frac{R}{R_3}\right)^2 dR_3.$$

    (b) Estimar un margen de error en los resistores, con el mismo tanto por ciento en los tres, para que R no cambie en más de un 5 por ciento.

4 Regla de cadena. Derivación Implícita

1. Sean

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x^2+y^2)^{-3/2}(1+x+x^2y-y^2)^{3/4} \\ x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3. \end{aligned}$$

(a) Obtener la derivada de $F(t) = f(x(t), y(t))$ respecto a t mediante sustitución y derivación

(b) Obtener la misma derivada mediante la regla de la cadena.

2. Repetir el ejercicio anterior con

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x^2 y) \\ x(t) &= e^{2t} \\ y(t) &= \sec 3t. \end{aligned}$$

3. Sean

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 y z^3 \sin(x+y+z) \\ x(t) &= \sin(t^2 e^t) \\ y(t) &= \sin(t^3 \cos t) \\ z(t) &= t e^{-t}. \end{aligned}$$

(a) Obtener la derivada de $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ respecto a t mediante sustitución y derivación

(b) Obtener la misma derivada mediante la regla de la cadena.

4. Sea $z = f(x,y)$ con $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Comprobar la siguiente fórmula que aparece en teoría de campos electromagnéticos,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

5. Determinar los valores de m para los cuales $z = f(y + mx)$ es solución de la ecuación en derivadas parciales

$$a\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + c\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

6. Una función $f(x,y)$ se dice homogénea de grado n si

$$f(tx, ty) = t^n f(x,y).$$

(a) Demostrar que una función homogénea de grado n satisface la siguiente ecuación

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x,y).$$

(b) Comprobar que la función

$$f(x,y) = x^5 - 3x^3y^2 + 2xy^4 - 7y^5$$

es una función homogénea y que satisface la ecuación anterior.

7. Encontrar mediante derivación implícita de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{3}$$

las derivadas primeras y segundas de z respecto de x e y en el punto $(1,1,1)$.

8. Repetir el ejercicio anterior con la ecuación

$$e^z \sin(x+y) + e^y \sin(x+z) + e^x \sin(y+z) = 0$$

y el punto (π,π,π).

9. Indicar los puntos en los que la ecuación

$$x^4 + y^4 + z^2 + 2xz - 2yz + 5 = 0$$

define implícitamente una función $z = g(x,y)$ y calcular sus derivadas primeras.

10. Calcular mediante derivación implícita de las ecuaciones

$$\begin{aligned} u^2 + 2v + x^2 + y^2 + z^2 &= 0 \\ 2u + v^2 - 2xyz &= 0 \end{aligned}$$

las derivadas primeras y segundas de u y v respecto de x, y y z.